Übungen zur Linearen Algebra II	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5	Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 24.11.2016, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A \cdot x$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Berechnen Sie für jeden Eigenwert λ eine Basis $\mathcal{B}_\lambda$ des Hauptraums $\mathrm{H}(f, \lambda)$.

b) Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{B}$ die disjunkte Vereinigung aller $\mathcal{B}_\lambda$ ist.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie eine Jordan Normalform J_A der nilpotenten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Geben Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $J_A = TAT^{-1}$ an.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) 0 ist der einzige Eigenwert von A.

b) A ist nilpotent, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = 0$.

c) Es gilt $\mathrm{Spur}(A^k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Hinweis: Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist definiert als $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt. Insbesondere gilt also $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}(A)$ für eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe 4

Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei Endomorphismen eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Die Abbildung f ist genau dann invertierbar, wenn $\chi_f(0) \neq 0$.

b) Wenn f invertierbar ist, dann gibt ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad kleiner gleich $n-1$, so dass $P(f) = f^{-1}$.

c) Wenn f nur einen Eigenwert λ hat, so ist $f - \lambda\, \mathrm{id}_V$ nilpotent.

d) Wenn f und g triagonalisierbar sind, so ist $f \circ g$ triagonalisierbar.

Hinweis: Beachten Sie in Teil c) und d), dass der Körper K nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen ist.