Übungen zur Linearen Algebra II Bergische Universität Wuppertal
Blatt 4 Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 17.11.2016, 10 Uhr M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

trigonalisierbar ist und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass TAT^{-1} eine obere Dreicksmatrix ist.

Aufgabe 2

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $0 \neq f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Der Endomorphismus f heißt nilpotent, wenn ein $r \in \mathbb{N}$ mit $f^r = 0$ existiert. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Ist f nilpotent, so besitzt $\mathrm{Eig}(f, 0)$ kein f-invariantes Komplement.

b) Wenn f nilpotent ist, dann ist 0 der einzige Eigenwert von f.

c) Ist 0 der einzige Eigenwert von f und zerfällt χ_f in Linearfaktoren, so ist f nilpotent.

d) Sei f ein nilpotent und m der Grad des Minimalpolynoms von f. Dann gibt es einen Vektor $x \in V$, so dass $U = \langle x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\rangle$ ein m-dimensionaler Vektorraum ist.

Aufgabe 3

Seien $U_1 = \langle (1, 0, 1)\rangle$ und $U_2 = \langle (1, 1, -1)\rangle$ zwei Unterräume des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine nicht-diagonalisierbare Matrix A, so dass $\mathrm{Eig}(A, 1) = U_1$ und $\mathrm{Eig}(A, 2) = U_2$.

b) Geben Sie eine A-invariante Fahne des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 4

Sei $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $D = T^{-1}AT$.

c) Berechnen Sie A^n indem Sie Teil b) benutzen und bestimmen Sie damit eine explizite Darstellung von f_n.