Übungen zur Linearen Algebra II	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3	Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 10.11.2016, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und das Minimalpolynom von f. Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums.

b) Sei $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und das Minimalpolynom von f. Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums.

Aufgabe 2

a) Sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

b) Für a, $b \in \mathbb{R}$ sei

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von $M_{a,b}$. Für welche a, b ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in K$ und ist $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

b) Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so haben $f \circ g$ und $g \circ f$ die selben Eigenwerte.

Aufgabe 4

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Wenn A und B diagonalisierbar sind, so ist auch AB diagonalisierbar.

b) Gilt $A^2 = E_n$, so ist A diagonalisierbar.

c) Gilt $A^2 = -E_n$, so ist A diagonalisierbar.

d) Die Menge der diagonalisierbaren Matrizen bilden einen Unterring des $K^{n\times n}$.