Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 2 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 03.11.2016, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Polynom $p = X^4 - 3X^2 - 4 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Bestimmen Sie eine Faktorisierung von p in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$.

b) Gibt es auch eine Faktorisierung von p in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$?

c) Führen Sie eine Polynomdivision von p mit dem Polynom $X^2 - 3 \in \mathbb{R}[X]$ durch.

Aufgabe 2

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ mit $g^2 = \mathrm{id}$ und $f^2 = \lambda \cdot f$ für ein $\lambda \in K$. Bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte von f und g. Geben Sie jeweils ein Beispiel für f und g an, bei dem diese Eigenwerte auftreten.

Aufgabe 3

Seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und $a, b \in R$. Beweisen Sie folgende Rechenregeln.

a) $0 \cdot a = 0$.

b) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

c) Falls $\{0\} \neq R$, dann gilt $1 \neq 0$.

d) Für alle $c, d \in R$ mit $a \cdot d = 1 = c \cdot a$ gilt $c = d$.

e) Sei $(R, +, \cdot)$ ein nullteilerfreier Ring und $a \neq 0$. Dann gilt für alle $c, d \in R$ mit $a \cdot c = a \cdot d$ bereits $c = d$.

Aufgabe 4

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und f, $g \in \mathrm{End}(V)$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen, so dass $f \circ g = g \circ f$ gilt. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Für jeden Eigenwert λ von f gilt $g(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \subseteq \mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

b) Es gibt ein Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}(g)$ beides Diagonalmatrizen sind.