Übungen zur Linearen Algebra II	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 14	Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 09.02.2017, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Betrachten Sie die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $T_i \in \mathcal{O}(4)$, $i = 1, 2$, so dass $T_i^{-1} A_i T_i$ eine Diagonalmatrix ist

b) Bestimmen Sie Matrizen S_i, $i = 1, 2$, so dass $S_i^t A_i S_i$ Diagonalgestalt mit Diagonaleinträgen aus $\{0, 1, -1\}$ hat.

c) Untersuchen Sie die durch die Matrizen beschriebenen Bilinearformen auf Definitheit.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom des Endomorphism $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{falls } 2 \nmid i \\ e_{i-1} & \text{falls } 2 \mid i \end{cases} .$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Zwei komplexe 3×3-Matrizen sind genau dann zueinander ähnlich, wenn sie das gleiche Minimalpolynom und das gleiche charakteristische Polynom haben.

b) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.

c) Seien U, W zwei Untervektorräume von V, so dass $V = U \oplus W$. Dann ist W isomorph zu V/U.

d) Sei U ein Untervektorraum von V. Dann ist die natürliche Abbildung $U^0 \to (V/U)^*$, $f \mapsto (x + U \mapsto f(x))$ wohldefiniert und induziert einen Isomorphismus $U^0 \cong (V/U)^*$.