Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

### Aufgabe 1

Untersuchen Sie die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

### Aufgabe 2

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und $b$ die von $A$ definierte Bilinearform

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x^t A y.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, so dass $M_{\mathcal{B}}(b)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist.

### Aufgabe 3

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $( \, , \, )$ und $\langle \, , \, \rangle$ zwei Skalarprodukte auf $V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so dass $(v, w) = a\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

(ii) Für alle $v, w \in V$ mit $\langle v, w\rangle = 0$ gilt $(v, w) = 0$.

### Aufgabe 4

Sei $(V, \langle \, , \, \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidscher Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei selbstadjungierte Endomorphismen. Dann ist $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert, wenn $g \circ f = f \circ g$ ist.

b) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ eine diagonalisierbare Abbildung. Dann sind die Eigenräume von $f$ paarweise orthogonal.

c) Sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein $y \in V$, so dass $f(y) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in V$.

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist.