Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils orthogonale Matrizen $P_i, i = 1, 2$, so dass $P_i^{-1} A_i P_i$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt *Drehung*, wenn f eine orhtogonale Abbildung ist und $\det(f) = 1$ gilt. Die Drehungen für $n = 2$ wurden in der Vorlesung besprochen. Sei nun $n = 3$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ eine Drehung mit $f \neq \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie:

a) Der Untervektorraum $U := \{v \in V \mid f(v) = v\}$ ist eindimensional. Man nennt U die *Drehachse* von f.

b) Der Untervektorraum $U^\perp$ von V ist zweidimensional. Es ist $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ und die eingeschränkte Abbildung $f\,|_{U^\perp} \colon U^\perp \to U^\perp$ ist wieder eine Drehung.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann ist $\det A = 1$ genau dann, wenn es eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = B^2$ gibt.

Aufgabe 4

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Für jedes $f \in \operatorname{End}(V)$ definiert man

$$||f|| = \sup\{||f(x)|| \mid x \in V \text{ mit } ||x|| \leq 1\}$$

und

$$\rho(f) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist ein Eigenwert von } f\}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $||f|| \geq \rho(f)$.

b) Wenn f selbstadjungiert ist, so gilt $||f|| = \rho(f)$.