Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein n-dimensionaler euklischer Vektorraum. Eine lineare Abbildung $F : V \to V$ heißt *Spiegelung*, wenn F orthogonal und $\dim \operatorname{Eig}(F, 1) = n - 1$ ist.

Betrachten Sie für $0 \neq w \in V$ die lineare Abbildung

$$F_w : V \to V\ ; v \mapsto v - 2 \cdot \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) F_w definiert eine Spiegelung und es ist $\langle w\rangle^{\perp} = \{v \in V \mid F_w(v) = v\}$.

b) Jede Spiegelung F ist von der Form $F = F_w$ für ein $w \in V$.

c) Zu jedem Untervektorraum U von V der Dimension $n - 1$ gibt es genau eine Spiegelung F mit $\operatorname{Eig}(F, 1) = U$.

d) Seien $u, v \in V$. Dann gibt es genau dann eine Spiegelung F mit $F(u) = v$, wenn $||u|| = ||v||$.

Aufgabe 2

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$.

a) Zeigen Sie, dass f die Nullabbildung ist.

b) Gilt die Aussage aus Teil a) immer noch, wenn man unitärer Vektorraum durch euklidischer Vektorraum ersetzt?

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3},$$

wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, x \mapsto A \cdot x$ die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung die von der Matrix A induziert wird.

a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$.

b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{C}^3$, so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(\langle\ ,\ \rangle)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen λ_i auf der Diagonalen ist.

b) Die Menge der orthogonalen Abbildungen $\mathcal{O}(V)$ bilden mit der üblichen Verknüpfung eine Gruppe.

c) Die Menge der Spiegelungen zusammen mit der Identitätsabbildung bildet eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$.

d) Für jede Spiegelung F von V gilt $\det(F) = -1$.

Wir wünschen allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Tom Wiersbowsky Nils Platz Lucas Ruhstorfer Thorsten Weist