Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 1 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 27.10.2016, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A \cdot x$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((1,2,1,1),((2,-1,1,0),(1,1,1,0),(1,0,0,1))$ die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den K-Vektorraum $U_n = \{p \in K[X] \mid \mathrm{grad}(P) \leq n\}$ der Polynome vom Grad kleiner gleich n mit Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Für ein Polynom $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in U_n$ definiert man eine formale Ableitung durch

$$p' := a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^{n-1} \in U_n.$$

Betrachten Sie die Abbildung $f : U_n \to U_n, p \mapsto p'$, die ein Polynom auf seine formale Ableitung abbildet.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Zeigen Sie, dass $f^{n+1} = 0$.

c) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von f.

Aufgabe 3

Seien $f : V \to V$ ein bijektiver Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Sei $g : V \to V$ ein weiterer Endomorphismus, so dass $f(v)$ und $g(v)$ für alle $v \in V$ linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass $g = \lambda f$ für ein $\lambda \in K$ gilt.

Aufgabe 4

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei K-lineare Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Sind $\lambda, \mu \in K$ Eigenwerte von f, so ist auch $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von f.

b) Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von f und g ist, so ist v auch ein Eigenvektor von $f + g$.

c) Wenn f bijektiv ist und λ ein Eigenwert von f ist, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1}.

d) Wenn f nicht injektiv ist, dann hat f einen Eigenwert.