Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer lesbar auf Ihre Abgabe. Werfen Sie diese dann in das Briefkastenfach Ihres Übungsleiters ein. Die Briefkastennummer Ihrer Übung finden Sie auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Betrachen Sie folgende Permutationen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_5, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und $\operatorname{sgn}(\tau)$.

b) Berechnen Sie die zu σ (bzw. τ) zugehörige Permutationsmatrix P_σ (bzw. P_τ) und bestimmen Sie deren Determinante.

c) Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt r-Zykel, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= a_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, r-1 \\ \pi(a_r) &= a_1 \end{aligned}$$

und π alle übrigen Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fest lässt. Bestimmen Sie das Signum für einen r-Zykel $\pi \in S_n$.

Aufgabe 3

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Sei $s_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$ die i-te Spaltensumme. Zeigen Sie:

a) Ist $s_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\det(A) = 0$.

b) Ist $s_i = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\det(A - E_n) = 0$.

c) Gibt es eine entsprechende Aussage für Zeilensummen statt Spaltensummen?

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $1 < m < n$. Ziehen wir in A nach den ersten m Zeilen und m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns A als aufgebaut aus 4 kleineren Matrizen vorstellen:

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

mit $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $R \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$.

a) Sei A' eine weitere Matrix, die nach dem obigen Schema in Kästchen aufgeteilt ist, d.h.

$$A' = \begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix},$$

mit $P' \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q' \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $R' \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $S' \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$. Beweisen Sie die Rechnenregel:

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{pmatrix}.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass man A und A' „kästchenweise“multiplizieren kann.

b) Sei $R = \mathbb{O}$ die Nullmatrix. Gemäß Teil a) gilt

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ \mathbb{O} & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ \mathbb{O} & E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie diese Formel um

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} P & Q \\ \mathbb{O} & S \end{pmatrix} = \det(S) \cdot \det(P)$$

zu zeigen.

c) Sei P eine invertierbare Matrix. Gemäß Teil a) gilt

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \mathbb{O} \\ RP^{-1} & E_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ \mathbb{O} & S - RP^{-1}Q \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie diese Formel um

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \det(P) \cdot \det(S - RP^{-1}Q)$$

zu zeigen.