Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 2

a) Sei $\pi \in S_n$ ein r-Zykel. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{r-1}$.

b) Betrachten Sie die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6 \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma^{2018})$.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist n ungerade und ${}^tA = -A$, so gilt $\det(A) = 0$.

b) Wenn ${}^tA \cdot A = E_n$ ist, so ist $\det(A) \in \{-1, +1\}$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 15 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe für 4 Punkte)

Sei $1 < m < n$ und

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$.

a) Sei $R = 0$. Nach Aufgabe 5 auf Blatt 6 gilt

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie diese Formel um

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix} = \det(S) \cdot \det(P)$$

zu zeigen.

b) Sei P nun eine invertierbare Matrix. Nach Aufgabe 5 auf Blatt 6 gilt

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ RP^{-1} & E_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S - RP^{-1}Q \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie diese Formel um

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \det(P) \cdot \det(S - RP^{-1}Q)$$

zu zeigen.