Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 30.05.2018, 15 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Übungsgruppe, in welche Sie eingeteilt wurden, auf ihre Abgabe.

Aufgabe 1

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden reellen Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Überprüfen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenfalls die inverse Matrix:

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ als Produkt von Elementarmatrizen.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei B eine $n \times m$-Matrix. Beweisen Sie folgende Aussagen über elementare Spaltenumformungen:

a) Die Matrix $BD^{\lambda,j}$ ist die Matrix, die aus B entsteht, indem man die j-te Spalte der Matrix B mit λ multipliziert.

b) Die Matrix BZ_{ij}^{λ} ist die Matrix, die aus B entsteht, indem man das λ-fache der i-ten Spalte der Matrix B zur j-ten Spalte der Matrix B addiert.

c) Die Matrix $B\sigma^{ij}$ ist die Matrix, die aus B entsteht, indem man die j-te und i-te Spalte der Matrix B vertauscht.

Aufgabe 4
Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl k mit $A^k = 0$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Summe zweier nilpotenten Matrizen ist wieder nilpotent.

b) Jede Matrix mit Spur Null ist nilpotent.

c) Wenn A eine nilpotente Matrix ist, so ist $E_n - A$ invertierbar.

d) Wenn A eine nilpotente Matrix ist und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \cdot B = B \cdot A$, dann ist $A \cdot B$ nilpotent.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe für 2 Punkte)
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $1 < m < n$. Ziehen wir in A nach den ersten m Zeilen und m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns A als aufgebaut aus 4 kleineren Matrizen vorstellen:

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

mit $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $R \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$. Sei A' eine weitere Matrix, die nach dem obigen Schema in Kästchen aufgeteilt ist, d.h.

$$A' = \begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix},$$

mit $P' \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q' \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $R' \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $S' \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$. Beweisen Sie die Rechnenregel:

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{pmatrix}.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass man A und A' kästchenweisemultiplizieren kann.