Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 12
Abgabe bis 12.07.2018, 10 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume $U_1 = \operatorname{Spann}(\{v_1, v_2, v_3\})$ und $U_2 = \operatorname{Spann}(\{v_3, v_4\})$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Untervektorräume $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = 5$. Seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V mit $\dim(U_1) = 3$ und $\dim(U_2) = 4$.

a) Welche Werte kann $\dim(U_1 \cap U_2)$ annehmen?

b) Geben Sie für jeden Wert ein explizites Beispiel an.

Aufgabe 3

Seien U,V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $\operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{Rang}(g), \operatorname{Rang}(f))$.

b) Sei jetzt $U = V = W$. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f) - \operatorname{Rang}(g) \leq \operatorname{Rang}(f + g) \leq \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang}(g).$$

Hinweis: Für eine lineare Abbildung $f : U \to V$ definieren wir $\operatorname{Rang}(f) = \dim(\operatorname{Bild}(f))$.

Aufgabe 4

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei a_i und b_i wie folgt gegeben sind? Falls ja, geben sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $f(v) = A \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ an.

(i) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(ii) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe für 4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Kern}(f) = V$.

b) Sei $\mathcal{B}_1$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von V ist und bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.