Übungen zur Linearen Algebra I	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 11	Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 05.07.2018, 10 Uhr	M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass alle Lösungen ausreichend zu begründen sind!

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ linear abhängig über $\mathbb{R}$?

c) Zeigen Sie, dass 1, i und $\sqrt{2}$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{C}$ sind.

Aufgabe 2

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängige Vektoren in V.

a) Zeigen Sie, dass die $n+1$ Vektoren $x_1, \dots, x_n, x_1 + \cdots + x_n$ linear abhängig sind, aber je n dieser Vektoren linear unabhängig sind.

b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ beliebig. Wir definieren $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Beweisen Sie, dass die Vektoren $x_1 - x, \dots, x_n - x$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 1$ gilt.

Aufgabe 3

Seien X eine Menge, K ein Körper und $M(X,K)$ die Menge der Abbildungen von X nach K. Sei $+ : M(X,K) \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und sei $\cdot : K \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Für jedes $y \in X$ sei die Abbildung $e_y \in M(X,K)$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq y, \\ 1, & \text{wenn } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $M(X,K)$ ist ein K-Vektorraum.

b) Sei $X = \{y_1, \dots, y_n\}$ eine endliche Menge. Dann bilden die Vektoren $e_{y_1}, \dots, e_{y_n}$ eine Basis von $M(X,K)$.

Aufgabe 4

a) Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x+y) \cdot y \\ x+y \end{pmatrix}$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+1-b \\ 2x+y \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$