13. Dezember 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1. Sei $d \in \mathbb{N}$ eine positive quadratfreie Zahl, d.h. $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $\sqrt[n]{d} \in \mathbb{R}$ die eindeutige positive reelle Nullstelle des Polynoms $X^n - d \in \mathbb{R}[X]$ und mit $\mathbb{Q}[\sqrt[n]{d}]$ den kleinsten Unterring von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt[n]{d}$ enthält. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert und ein Isomorphismus von Körpern ist

$$\mathbb{Q}[X]/(X^n - d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}[\sqrt[n]{d}], \quad \overline{f} \mapsto f(\sqrt[n]{d}).$$

Aufgabe 9.2. Sei $d \in \mathbb{N}$ eine quadratfreie Zahl. Setze $\alpha = \sqrt[3]{d}$.

(1) $X^3 - d$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
(2) Setze $K := \mathbb{Q}[\alpha]$. Dann $X^3 - d = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2)$ ist eine Faktorisierung in irreduzible Polynome in $K[X]$. (*Hinweis:* Um zu zeigen, dass $X^2 + \alpha X + \alpha^2 \in K[X]$ irreduzibel ist, berechnen Sie die Nullstellen (p-q-Formel) und beachten Sie $K \subset \mathbb{R}$.)
(3) Setze $L := K[Y]/(Y^2 + \alpha Y + \alpha^2)$. Zeigen Sie, dass L eine Körpererweiterung vom Grad 6 über $\mathbb{Q}$ ist, also $[L : \mathbb{Q}] = 6$.
(4) Zeigen Sie, dass $X^3 - d$ in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es gibt $\beta, \gamma \in L$ mit $X^3 - d = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.
(5) Zeigen Sie, dass es folgende Ringisomorphismen gibt

$$\mathbb{Q}[X]/(X^3 - d) \cong K, \quad K[X]/(X^3 - d) \cong K \times L,$$
$$L[X]/(X^3 - d) \cong L \times L \times L.$$

Aufgabe 9.3. Sei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit 5 Elementen.

(1) Zeigen Sie, dass $X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel ist.
(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_{125} := \mathbb{F}_5[X]/(X^3 + X + 1)$ ein Körper mit 125 Elementen ist.
(3) Sei $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{F}_{125}$ die Restklasse von X. Wir wissen, dass $1, \alpha, \alpha^2$ eine $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathbb{F}_{125}$ ist. Geben Sie die folgenden Elemente von $\mathbb{F}_{125}$ als eine $\mathbb{F}_5$-Linearkombination dieser Basis an

$$(1 + \alpha) \cdot (\alpha^2 - 4), \quad (1 + \alpha)^5, \quad (2 + \alpha)^{-1}.$$

Aufgabe 9.4. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad p. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in L \setminus K$ gilt $L = K[\alpha]$ und dass das Minimalpolynom von α über K Grad p hat.

---

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`