06. Dezember 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1. Sei $\varphi : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Eulersche φ-Funktion, also $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$.

(1) Für jedes $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, finden Sie alle Zahlen $n \geq 2$ mit $\varphi(n) = m$.
(2) Seien $a, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Zeigen Sie, dass dann $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$. (*Hinweis:* Erinnern Sie sich an §1.)

Aufgabe 8.2. Sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit drei Elementen. Finden Sie alle normierten irreduziblen Polynome vom Grad zwei in $\mathbb{F}_3[X]$.

Aufgabe 8.3. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(1) $f = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ (*Hinweis:* Reduktionskriterium)
(2) $g = X^4 + 100X^3 + 1000X^2 + 10000X + 40$ (*Hinweis:* Eisenstein Kriterium)
(3) $h = YX^2 + Y^2X - X - Y + 1 \in R[X]$ mit $R = \mathbb{Q}[Y]$ (*Hinweis:* Reduktionskriterium)

Aufgabe 8.4. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K und sei $p \in R$ ein Primelement mit zugehöriger Bewertung $v_p : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Sei $R_{(p)} = \{x \in K \mid v_p(x) \geq 0\}$ der Ring aus Aufgabe 7.3.

(1) Zeigen Sie, $R_{(p)}^\times$(= Einheiten in $R_{(p)}$) $= \{x \in K \mid v_p(x) = 0\}$.
(2) Sei $I \subset R_{(p)}$ ein Ideal. Zeigen Sie, es gibt ein $n \geq 0$ mit $I = \{x \in K \mid v_p(x) \geq n\} = p^n R_{(p)}$. Insbesondere ist $R_{(p)}$ ein Hauptidealring.

[1]Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`