08. November 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. Sei R ein Integritätsbereich und $\mathrm{Frac}(R)$ sein Quotienten Körper. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$i : R \to \mathrm{Frac}(R), \quad a \mapsto i(a) := \tfrac{a}{1},$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie, dass i folgende Eigenschaft besitzt: Sei K ein Körper und $\varphi : R \to K$ ein *injektiver* Ringhomomorphismus. Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Körpern, $\tilde{\varphi} : \mathrm{Frac}(R) \to K$, der $\tilde{\varphi}(i(a)) = \varphi(a)$ für alle $a \in R$ erfüllt.

(*Hinweis*: Zeigen Sie, dass $\tilde{\varphi}(\frac{a}{b}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ die einzige Lösung ist.)

Aufgabe 4.2. Welche der folgenden Ideale sind gleich, welche sind ineinander enthalten?

(1) In $\mathbb{Z}$: $(2,3)$, $\mathbb{Z}$, (5), (7), $(10,15)$
(2) In $\mathbb{Z}[x]$: $(2,x)$, $(2x)$, $(9x,4x)$, (x^2+x^3), $(5x^2+x^3)$, $(5(x^2+x^3))$
(3) In $\mathbb{Q}[x]$: $(2,x)$, $(2x)$, $(9x,4x)$, (x^2+x^3), $(5x^2+x^3)$, $(5(x^2+x^3))$

Aufgabe 4.3. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ein Ring ist. Für $a \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $\bar{a} = a + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die von a repräsentierte Linksnebenklasse. Wir wissen außerdem, dass $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \pm\bar{1}, \pm\bar{2}, \pm\bar{3}\}$.

(1) Zeigen Sie, für jedes $a \in \{\pm1, \pm2, \pm3\}$ gibt es ein $b \in \{\pm1, \pm2, \pm3\}$, dass $\bar{a}\cdot\bar{b} = 1$ erfüllt und bestimmen Sie dieses b explizit. Schließen, Sie dass $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ein Körper ist.
(2) Finden Sie alle $c \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$ mit $\bar{c} \in \{\bar{a}^4 \mid a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4.4. Sei R ein Ring und $R[X]$ der Polynomring in einer Variablen X mit Koeffizienten in R. Sei $b \in R$. Sei $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$, dann bezeichnen wir mit $f(b)$ das folgende Element aus R

$$f(b) := \sum_{i=0}^n a_i b^i = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots a_1 b + a_0.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\epsilon_b : R[X] \to R$, $f(X) \mapsto f(b)$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist.
(2) Sei $(X-b) \subset R[X]$ das von $X-b$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass $X^i - b^i \in (X-b)$ für alle $i \geq 1$.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

(3) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\epsilon_b) = (X - b)$.
(*Hinweis*: Für die Inklusion "$\subset$", beachten Sie: Falls $f(X) \in \mathrm{Ker}(\epsilon_b)$, dann $f(X) = f(X) - f(b)$ und benutzen Sie (2).)

(4) Schließen Sie, dass es einen Ringisomorphismus

$$\bar{\epsilon}_b : R[X]/(X - b) \xrightarrow{\simeq} R$$

gibt, der $\bar{\epsilon}_b\left(\overline{f(X)}\right) = f(b)$ erfüllt, wobei

$$\overline{f(X)} = f(X) + (X - b) \in R[X]/(X - b)$$

die von $f(X)$ repräsentierte Linksnebenklasse bezeichnet.
(*Hinweis:* §2, Korollar 33.)