25. Oktober 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

(1) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(2) Setze $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) := \mathrm{Ker}(\det)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\overline{\det} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

gibt, der eindeutig bestimmt ist durch

$$\overline{\det}(\pi(A)) = \det(A), \quad \text{für alle } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

Hierbei ist $\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ die Restklassenabbildung, also $\pi(A) = A \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 2.2. (1) Zeigen Sie, dass $R_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $R_2 = \{7, -6, 16, 10, -10, -2, 27\}$ Repräsentantensysteme von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sind.

(2) Ist $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so schreiben wir im Folgenden $\overline{n} = n + 7\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Wir schreiben

$$\overline{2} + \overline{1} = \overline{x}_1, \quad \overline{8} + \overline{(-12)} = \overline{x}_2, \quad \overline{100} + \overline{1000} = \overline{x}_3, \quad \overline{77} + \overline{777} = \overline{x}_4.$$

Bestimmen Sie die Werte von $x_1, \ldots, x_4 \in R_1$, die die obigen Gleichungen erfüllen. Ebenso mit R_2.

Aufgabe 2.3. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$$

auf der Menge $G \times G := \{(g, h) \mid g \in G, h \in G\}$ die Struktur einer Gruppe definiert mit (e, e) als neutralem Element.

Aufgabe 2.4. Seien G_1 und G_2 die beiden Gruppen mit vier Elementen aus Aufgabe 1.1. Zeigen Sie, dass eine dieser beiden Gruppen zyklisch ist und somit isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die andere Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist (versehen mit der Gruppenstruktur aus Aufgabe 2.3).

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`