31. Januar 2018

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 14

Aufgabe 14.1. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom vom Grad 4. Sei K_f der Zerfällungskörper von f über K. Wir wissen, dass K_f Galois über K ist. Zeigen Sie, dass die Galois Gruppe keine zyklische Gruppe der Ordnung 24 sein kann.

Aufgabe 14.2. Sei $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive 8-te Einheitswurzel. Bestimmen Sie,

(1) den Grad $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}]$;
(2) das 8. Kreisteilungspolynom Φ_8;
(3) die Anzahl der echten Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq E \subsetneq \mathbb{Q}[\zeta]$.

Aufgabe 14.3. Sei L/K eine endliche Galois Erweiterung mit Galois Gruppe $G = G(L/K)$.

(1) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und L^H der zugehörige Fixkörper. Sei E ein Zwischenkörper von L^H/K mit $[L : E] = |H|$. Zeigen Sie, dass $E = L^H$.
(2) Sei E ein Zwischenkörper von L/K. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe, so dass für alle $\sigma \in H$ gilt $\sigma(e) = e$ für alle $e \in E$. Nehmen Sie an, dass $|H| = [L : E]$. Zeigen Sie, dass $H = G(L/E)$.

Aufgabe 14.4. Sei $\sqrt[12]{5} \in \mathbb{R}_+$ die eindeutige positive reelle Lösung von $X^{12} - 5 = 0$. Setze $K := \mathbb{Q}[\sqrt[12]{5}]$.

(1) Zeigen Sie, dass K nicht Galois über $\mathbb{Q}$ ist.
(2) Bestimmen Sie eine Galois Hülle L von $K/\mathbb{Q}$.
(3) Zeigen Sie, dass die Galois Gruppe $G(L/\mathbb{Q})$ eine normal Untergruppe $H \subset G(L/\mathbb{Q})$ besitzt, so dass $G(L/\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

Hier ist eine lose Liste von Themen, die für die Klausur relevant sein könnten:

- Gruppen: Normalteiler, Quotientengruppen G/H, Kleiner Satz von Fermat, zyklische Gruppen, Permutationsgruppe
- Ringe: Ideale, Polynomringe, Integritätsbereich, R/I, Chinesischer Restklassen Satz
- Faktorielle Ringe: Euklidische Ringe, Hauptidealringe, $K[X]$, $\mathbb{Z}$, ggT, kgV, Polynomdivision, Euklidischer Algorithmus, irreduzible Elemente, Primelemente, Gauß Lemma, Restklassenkriterium für Irreduzibilität, Eisenstein Kriterium
- Körper: Charakteristik, algebraische Körpererweiterungen und ihre Eigenschaften, Konstruktion von Körpern $K[X]/(f)$, $[L : K]$, Basis von L/K, algebraisch abgeschlossen, Existenz des algebraischen Abschlusses, $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$
- separabel und normal: Definition und Eigenschaften, Kriterien für Separabilität, perfekte Körper (Bsp und Nicht-Bsp), endliche Körper, $\mathbb{F}_q^\times$ ist zyklisch, Zerfällungskörper, Zusammenhang mit Körpereinbettungen, Separabilitätsgrad, Satz vom Primitiven Element
- Galois Theorie: Galois Erweiterung, Galois Gruppe eines Zerfällungskörpers eines separablen Polynoms vom Grad n ist Untergruppe von S_n, Galois Hülle, Hauptsatz der Galois Theorie
- Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$: n-ter Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$, seine Galois Gruppe, n-tes Kreisteilungspolynom, Formel $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, Eulersche φ-Funktion.

Die Klausuraufgaben werden sich an den (milderen) Übungsaufgaben orientieren!

Wie auf der Vorlesungsseite angekündigt, dürfen Sie vier einseitig handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten (oder zwei beidseitig handschriftlich beschriebene DIN A4 Seiten) mit zur Klausur bringen.