10. Januar 2018

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. (1) Zeigen Sie, dass es unendliche viele Primzahlen in $\mathbb{Z}$ gibt. (*Hinweis:* Sonst gibt es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Zeigen Sie, dass dann $a = p_1 \cdots p_n + 1$ keine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist und finden Sie einen Widerspruch.)

(2) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ gibt. (*Hinweis:* Gleicher Ansatz wie in (1).)

(3) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Schließen Sie aus (2), dass K unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 11.2. Beschreiben Sie in den folgenden Beispielen alle K-Homomorphismen von L in den algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K ("beschreiben" eines K-Homomorphismus' $\sigma : L \to \bar{K}$ bedeutet hier, eine Basis von L/K zu finden und deren Bild unter σ anzugeben):

(1) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$. (*Hinweis:* In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $f = X^4 - 10X^2 + 1$ das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ ist. Zeigen Sie zuerst, dass $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ alle Nullstellen von f sind.)

(2) $K = \mathbb{F}_3(T) = \mathrm{Frac}(\mathbb{F}_3[T])$, $L = K[X]/(X^9 - T)$, wobei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen ist. (Aus der Vorlesung (Eisenstein-Kriterium) wissen wir bereits, dass $X^9 - T$ irreduzibel und L somit ein Körper ist.)

Aufgabe 11.3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \geq 0$.

(1) Sei $p = 0$ oder $p > 0$ und $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$. Zeigen Sie, $\mu_n(K) := \{a \in K \mid a^n = 1\}$ ist eine zyklische Untergruppe von $K^\times$ mit genau n-Elemente. (Hinweis: Zur Bestimmung der Kardinalität von $\mu_n(K)$ zeigen Sie zuerst, dass $f = X^n - 1$ separabel ist.)

(2) Sei $p > 0$. Zeigen Sie $\mu_{p^r}(K) = \{1\}$, für alle $r \geq 0$.

Aufgabe 11.4. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen.

(1) Zeigen Sie, dass $f = X^2 + 1$ und $g = X^2 - X - 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$ sind.

(2) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{F}_3[X]/(f)$ und $L := \mathbb{F}_3[X]/(g)$ Körper mit jeweils 9 Elementen sind.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

(3) Aus der Vorlesung wissen wir, dass es einen Körperisomorphismus $K \cong L$ gibt. Geben Sie einen solchen Isomorphismus an. (*Hinweis:* Denken Sie daran, dass ein $\mathbb{F}_3$-Homomorphismus $\mathbb{F}_3[X] \to L$ eindeutig durch sein Bild von X bestimmt ist.)