20. Dezember 2017

Algebra und Zahlentheorie [1]
Übungsblatt 10

Die folgenden Aufgaben 10.1 – 10.7 könnten ähnlich zu möglichen Klausuraufgaben sein. Die Punkte, die man in einer Klausur für die Lösung bekäme sind in der Klammer hinter der Aufgabe angegeben. **Achtung:** Sowohl die Anzahl als auch die Art der Aufgaben können in der Klausur deutlich von den Beispielaufgaben hier abweichen. Insbesondere, da sich sicherlich 2 - 3 Aufgaben auf den Stoff beziehen werden, den wir nach den Weihnachtsferien besprechen. In einer 90 minütigen Klausur (wir der unsrigen), gäbe es wohl nur 5 Aufgaben, hier 10.2 - 10.4 und entweder 10.1 oder 10.7 und entweder 10.5 oder 10.6.

Aufgabe 10.1 (5 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\zeta \in G \setminus \{1\}$ mit $\zeta^p = 1$. Zeigen Sie, dass die kleinste Untergruppe von G, die ζ enthält genau p Elemente hat.

Aufgabe 10.2 (5 Punkte)**.** Finden Sie alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}$, die folgende Bedingungen erfüllen

$$a \equiv 2 \bmod 4 \quad \text{und} \quad a \equiv 3 \bmod 5 \quad \text{und} \quad a \equiv 4 \bmod 9$$

und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 10.3 (4+5=9 Punkte)**.** Sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit 3 Elementen.

(1) Konstruieren Sie einen Körper $\mathbb{F}_9$, der ein 2-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum ist, also 9 Elemente hat.
(2) Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_9^\times$ zyklisch ist, indem Sie einen Erzeuger angeben.

Aufgabe 10.4 (5+4=9 Punkte)**.** Gegeben seien die beiden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$

$$f = X^4 + X^2 - 2, \quad g = X^3 + 2X^2 - X - 2.$$

(1) Berechnen Sie (nachvollziehbar) $\mathrm{ggT}(f, g)$.
(2) Sei $R = \mathbb{Q}[X]/(\mathrm{ggT}(f, g))$. Ist R ein Körper? Ist R integer? Was ist die Dimension von R als $\mathbb{Q}$-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10.5 (1+2+3+5=11 Punkte)**.** Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ der kleinste Teilkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ enthält.

(1) Zeigen Sie $[K : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 2$.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`

(2) Zeigen Sie $[K : \mathbb{Q}] = 4$.
(3) Zeigen Sie $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{5}] = K$.
(4) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Aufgabe 10.6 (1+2+1+2+1+1+2= 10 Punkte)**.** Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel, d.h. $\{1, \zeta, \zeta^2\}$ sind alle Nullstellen von $X^3 - 1$ in $\mathbb{C}$.

(1) Geben Sie das Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ von ζ über $\mathbb{Q}$ an.
(2) Zeigen Sie, dass $\zeta, \zeta^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
(3) Geben Sie das Minimalpolynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ an.
(4) Zeigen Sie, dass g genau eine Nullstelle in $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ hat.
(5) Zeigen Sie, dass f auch irreduzibel ist als Element in $K[X]$.
(6) Sei $L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta]$. Berechnen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.
(7) Zeigen Sie, dass L der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist, der alle Nullstellen von g enthält.
(8) *(Zusatzaufgabe) Zeigen Sie, $L \cong \mathbb{Q}[X, Y]/(f(X), g(Y))$.

Aufgabe 10.7 (5 Punkte)**.** Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ keine endliche Körpererweiterung ist.

Insgesamt gibt es also 54 Punkte, sicherlich bestanden hätte man mit 27 Punkten.

Die folgende Aufgabe ist zum Spaß über die Feiertage. Eine solche Aufgabe käme nicht in der Klausur vor. (Und sie gehört auch nicht zum zu bearbeitenden Teil des Übungszettels.)

Aufgabe 10.8. Sei $|-|: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ der Absolutbetrag. Zur Erinnerung eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}$, heißt Cauchy Folge, wenn es für alle $N \geq 1$ ein $n_0 \geq 1$ gibt mit $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{N}$, für alle $n, m \geq n_0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge wenn es für alle $N \geq 1$ ein $n_0 \geq 1$ gibt, so dass $|a_n| \leq \frac{1}{N}$, für alle $n \geq n_0$.

(1) Zeigen Sie $R = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy Folge in } \mathbb{Q}\}$ ist ein Unterring des Produktrings $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}$.

(2) Sei $\mathfrak{m} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge in } \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist.

(3) Zur Erinnerung aus Analysis: $\mathbb{R}$ ist vollständig, d. h. jede Cauchy Folge konvergiert und jedes Element in $\mathbb{R}$ ist der Grenzwert einer Cauchy Folge in $\mathbb{Q}$. Benutzen Sie das, um zu zeigen:

$$R \to \mathbb{R}, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$$

ist ein Ringhomomorphismus und induziert einen Isomorphismus von Körpern

$$R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}.$$

Mit etwas mehr Arbeit kann man auch direkt eine Norm auf $R/\mathfrak{m}$ definieren und zeigen, dass $R/\mathfrak{m}$ ein normierter, vollständiger und total geordneter Körper ist. Es gibt also eine Möglichkeit die reellen Zahlen zu konstruieren.