20. Oktober 2017

**Algebra und Zahlentheorie** [1]
**Übungsblatt 1**

**Aufgabe 1.1.** Sei $M = \{e, a, b, c\}$ eine Menge mit vier Elementen.

(1) Zeigen Sie, es gibt genau eine Gruppe $(G_1, \cdot, 1)$, so dass $G_1 = M$, $1 = e$ und das Gruppengesetz erfüllt $a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = e$.
(2) Zeigen Sie, es gibt genau eine Gruppe $(G_2, \cdot, 1)$, so dass $G_2 = M$, $1 = e$ und das Gruppengesetz erfüllt $a \cdot b = e$. (*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass dann auch $b \cdot a = e$ und $c \cdot c = e$ gelten muß.)
(3) Sei $G$ eine Gruppe mit vier Elementen. Zeigen Sie, dass es dann entweder einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \xrightarrow{\simeq} G_1$ oder einen Gruppenisomorphismus $\psi : G \xrightarrow{\simeq} G_2$ gibt.
(4) Schließen Sie, dass jede Gruppe mit vier Elementen abelsch ist. (*Hinweis:* Bemerken Sie erst, dass $G_1$ und $G_2$ abelsch sind.)

**Aufgabe 1.2.** Sei $S_3$ die dritte Permutationsgruppe.

(1) Wieviele Elemente hat $S_3$?
(2) Kann $S_3$ eine Untergruppe mit 2, 3 oder 4 Elementen haben? In jedem der Fälle, geben Sie entweder eine entsprechende Untergruppe an oder begründen Sie, warum eine solche Untergruppe nicht existieren kann.

**Aufgabe 1.3.** Sei $G$ eine Gruppe und $\varphi : G \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen rationalen Zahlen. Nehmen Sie an, dass das Bild von $\varphi$ in den ganzen Zahlen enthalten ist, also $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann sogar gilt $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{\pm 1\}$.

**Aufgabe 1.4.** (1) Zeigen Sie, dass $H := 3\mathbb{Z} := \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.
(2) Geben Sie eine Beschreibung aller Linksnebenklassen von $H$ in $\mathbb{Z}$.

[1] Fragen oder Kommentare an `kay.ruelling@fu-berlin.de` oder `filip@zedat.fu-berlin.de`