Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal

W- Theorie Übungsklausur WS19/20

Notation:

1. $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ ist ein W- Raum
2. μ_c ist die Cantor Verteilung.

Übung I: gegeben eine Folge von Zufallsvariabeln $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $X_n \in \mathcal{L}^p(\{\Omega, \mathcal{F}, P)\})$, $p \geq 1$

1) Beweisen Sie, dass die Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zu X auch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit- P zu X impliziert.

2) Sei $\{\Omega, \mathcal{F}, P)\})= (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_c)$. Finden Sie ein Beispiel einer Folge, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $X_n \in \mathcal{L}^2(\{\Omega, \mathcal{F}, P)\})$, die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit- P konvergiert, aber nicht im $\mathcal{L}^2(\{\Omega, \mathcal{F}, P)\})$ -Raum konvergiert.

Übung II:
Ein Wertpapier, der am 1.1.2020 1000 Euro wert ist, steigt jeden Monat um 30 Euro mit Wahrscheinlickeit 1/3 , sinkt um 10 Euro mit Wahrscheinlichkeit 1/3 und bleibt gleich mit Wahrscheinlichkeit 1/3, wobei die Änderungen in jedem Monat stochastisch unabhängig sind. Sei W_n dessen Wert am Ende des n-ten Monats

3) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Fouriertransformierte von W_n.

4) Untersuchen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Wertpapier immer wieder steigt.

5) Beweisen Sie, dass W_n/n in Verteilung konvergiert.

Übung III:
6) Sei $\mathcal{S} = \{]a, b] : a < b\}$, $\Sigma = \{[a, b] : a < b\}$

Beweisen Sie $\sigma(S) = \sigma(\Sigma)$

Übung III:(zwei Studierende zusammen)
7) Seien X_n Gauss verteilte Zufallsvariabeln mit Erwartungswert x_0 und Varianz $1/n^2$. Beweisen Sie dass dessen Verteilung zu δ_{x_0} konvergiert.

Übung IV:
Sei X eine Zufallsvariabel , welche die Werte $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit Wahrscheinlichkeit $c\frac{1}{k^2}$ annimmt.

8) Definieren Sie c und bestimmen Sie auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Verteilungen μ_1 und μ_2 von X und $Y = -X$. (Schreiben Sie diese als Kombination von δ Verteilungen.)

9) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $Y_n = (-1)^n Y$, in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung.

Übung V:
10) Beweisen Sie den Satz von Borel Cantelli für unabhängige Ereignisse

Übung VI: (zwei Studierende zusammen)
11) Sei X eine Zufallsvariabel auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\mu(dx)$$

wobei μ die Verteilung von X ist.

Übung VII: 12) Beweisen Sie an Hand der Fouriertransformierte, dass die Normalverteilung alle Momente hat

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.
Jede Teilübung wird mit 3 Punkten bewertet.
Abgegebene Blätter ohne Namen werden nicht bewertet.
Elektronische Geräte jeder Art und eigene Blätter sind nicht erlaubt
Das Prüfungsamt und die Prüfungsauschusse werden über Täuschungsversuche informiert.