**Prof. Dr. Barbara Rüdiger**
**Bergische Universität Wuppertal,**

# Übungszettel III -W-Theorie

Notation:

a) $\mathbf{1}_A$ steht für die Indikatorfunktion auf der Menge $A$

b) $\mu_C$ steht für die Verteilung mit der Cantor -Funktion als Verteilungsfunktion

**Übung I:**

Gegeben $X_n := c_n 1_{[0,1/3^n]}$, $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$.

1) Beweisen Sie, dass die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit $\mu_C$ nach Null konvergiert.

2) Wählen Sie $c_n$, $n \in \mathbb{N}$, so dass die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Norm $\|\cdot\|_1$ nach Null konvergiert, jedoch in Norm $\|\cdot\|_2$ nicht konvergiert.

**Übung II:**(zwei Studierende zusammen)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum. Seien $A, B \in \mathcal{F}$.

3) Beweisen Sie, dass die Ereignisse $A$ und $B$ stochastisch unabhängig sind falls und nur falls $A^c$ und $B^c$ stochastisch unabhängig sind.

4) Beweisen Sie, dass die reellwertige Zufallsvariabeln $\mathbf{1}_A$ und $\mathbf{1}_B$ stochastisch unabängig sind falls und nur falls die Ereignisse $A$ und $B$ stochastisch unabhängig sind

**Übung III:** (zwei Studierende zusammen)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Massraum. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $f \geq 0$.

5) Beweisen Sie, dass $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$, mit $\nu(A) := \int_A f d\mu$ ein neues Mass auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert.

6) Beweisen Sie: $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ falls und nur falls $gf \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

**Übung IV:**

7) In einer Fabrik werden 80% der Schrauben von der Firma A geliefert, und die restlichen von der Firma B. 1%, bzw 2% , der Schrauben der Firma A, bzw der Firma B, sind defekt. Es wird eine defekte Schraube eingesetzt. Mit

welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese aus der Firma B.

**Übung V:**

8) Geben Sie ein Beispiel von Zufallsvariabeln $X, Y$ auf einem W -Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die unkorreliert aber nicht stochastisch unabhängig sind.

**Übung VI:**

9) Geben Sie ein Beispiel einer (endlichen oder unendlichen) Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariabeln auf einem W- Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die paarweise stochastisch unabhängig sind, jedoch nicht stochastisch unabhängig sind.

**Übung VII:**

10) Beschreiben Sie zwei unterschiedliche 2 -dimensionalen Verteilungen dessen Marginale uniform verteilt sind

**Übung VIII:**

11) Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, 2^{\Omega})$, mit $\Omega = \{1, ..., N\}$, und $N \in \mathbb{N}$ fixiert. Beweisen Sie, dass alle Elementarereignisse $\omega \in \times_{n\in\mathbb{N}}\Omega$ Wahrscheinlichkeit Null im Produktwahrscheinlichkeitsraum $(\times_{n\in\mathbb{N}}\Omega, \otimes_{n\in\mathbb{N}}2^{\Omega}, \otimes_{n\in\mathbb{N}}P)$ haben.

**Übung IX:**

$X$ sei eine Zufallsvariabel welche die Werte 4 und $-4$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 annimmt.
Ein Wertpapier $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ habe Wert 100 im ersten Monat. Es ändert sich jeden Monat um den Wert $X_n$, welcher wie $X$ verteilt ist. $X_n$, für $n \in \mathbb{N}$, seien stochastisch unabhängig.

12) Sei $N \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $P(S_n - 100 < -N) \leq \frac{(n-1)16}{N^2}$

13) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass nach $m$ Monate das Wertpapier nur sinkt.

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.