Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal,

Übungszettel II -W-Theorie

Übung I:

1) Schreiben Sie die Poissonverteilung $Poiss(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ als Kombination von Delta - Verteilungen und schreiben Sie dessen Verteilungsfunktion.
2) Beweisen Sie, dass alle n- te Momente ($n \in \mathbb{N}$) von $Poiss(\lambda)$ endlich sind.
3) Berechnen Sie ersten und zweiten Moment von $Poiss(\lambda)$.

Übung II: (zwei Studierende zusammen)

4) Definieren Sie (irgend) eine σ -Algebra auf einer Menge Ω und ein W-Maß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so wie zwei reellwertige Funktionen f und g auf Ω, die folgende Eigenschaften erfüllen:
   (a) f ist $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - messbar,
   (b) g ist nicht $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - messbar,
   (c) $f = g$ P -f.ü..
5) Erweitern Sie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ auf ein W- Raum $(\Omega, \mathcal{G}, \hat{P})$, so dass
   (a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$,
   (b) g ist $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - messbar
   (c) $f = g$ $\hat{P}$ -f.ü..

Übung III:

6) Sei $1 \leq p < \infty$ und $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)}$. Beweisen Sie:
$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ impliziert $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$

Übung IV:

Sei 1_Q die Indikatorfunktion auf den rationalen Zahlen.

7) Beweisen Sie, dass 1_Q nicht Riemann integrierbar ist.
8) Beweisen Sie, dass 1_Q bzgl dem Lebegues -Mass Lebegues -integrierbar ist.

9) Finden Sie mindestens zwei unterschiedliche W- Masse auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzgl denen der Erwartungswert von 1_Q Null ist.

10) Finden Sie mindestens zwei unterschiedliche W- Masse auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzgl denen der Erwartungswert von 1_Q eins ist und geben Sie jeweils die Verteilungen von 1_Q an.

Übung V:

11) Sei X eine Zufallsvariabel, die Normal mit Varianz $D > 0$ verteilt ist. Berechnen Sie den Erwartungswert von $exp(X)$.

Übung VI: (drei Studierende zusammen)

Gegeben $X := \sum_n c_n 1_{[0,1/n^2]}$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1])\mu_U)$, wobei μ_U die uniforme Verteilung ist.

12) Wählen Sie $c_n > 0$ so, dass X

   (a) endliches erstes Moment hat,

   (b) unendliches zweites Moment hat

13) Schreiben Sie die Verteilung der Zufallsvariabel X als Kombination von Delta Verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

14) Wählen Sie c_n so, dass X Erwartungswert Null hat.

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.