Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal,

Übungszettel I -W-Theorie

Notation:

a) $g \in \Sigma([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, mit $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$ paarweise disjunkt

b) $g \in \Sigma_\infty([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, mit $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$ paarweise disjunkt.

c) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ für f reellwertige messbare Funktion.

Übung I:

1) Beweisen Sie, dass für jede $\mathcal{B}([0,T])/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion g eine Folge von Funktionen $g_n \in \Sigma_\infty([0,T])$ existiert, so dass $lim_{n\to\infty}\|g - g_n\|_\infty = 0$

2) Beweisen Sie, dass $\Sigma([0,T])$ dicht in $\Sigma_\infty([0,T]) \cap \mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda)$ in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ ist.

Übung II:

3) Sei I eine Index Menge. Seien $\mathcal{F}_\alpha$ σ -Algebras auf der Menge Ω. Beweisen Sie, dass $\cap_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ eine σ -Algebra auf Ω ist.

Übung III:

4) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Sei $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{F}|_A := \{C = A \cap B : B \in \mathcal{F}\}$ eine σ -Algebra auf A ist.

Übung IV:

5) Beweisen Sie, dass $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6) Beweisen Sie, dass für die Verteilungsfunktion F_μ von μ gilt, dass $\mu(x_0) = F_\mu(x_0) - \lim_{x\uparrow x_0} F_\mu(x)$

Übung V:

7) Sei $\mathcal{A} :=$ {alle offene Mengen aus $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$}. Beweisen Sie, dass $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Beweisen Sie, dass das gleiche gilt, wenn wir statt dessen alle geschlossenen Mengen nehmen

Übung VI:

8) Sei $0 \leq p \leq 1$. Schreiben Sie die Verteilung von $B(n, p)$ als Kombination von Delta - Verteilungen und schreiben Sie dessen Verteilungsfunktion.

9) Beweisen Sie, dass, falls X eine Zufallsvariabel ist, dessen Verteilungsfunktion F streng monoton und stetig ist, dann $F(X)$ uniform auf $[0, 1]$ verteilt ist.

10) Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Verteilung μ. Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in [0, 1]$ eine Borelsche Menge A existiert, für die gilt $\mu(A) = \alpha$

Übung VII:

11) Seien X und Y reellwertige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass $max(X, Y)$ eine Zufallsvariable ist.

12) Seien X_n reellwertige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass $sup(X_n)$ eine Zufallsvariable ist.

Übung VIII:
Sei $C(x)$ die Cantor Funktion.

13) Schreiben Sie $C(x)$ als Funktion.

14) Geben Sie die Menge an, wo $C(x)$ nicht differenzierbar ist.

15) Beweisen Sie dass $C(x)$ eine stetig und singuläre Verteilungsfunktion ist

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.