Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, Exam, 5 February 2019

Notation:

0) $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ steht für einen W-Raum.

a) μ_U steht für die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$.

b) $exp(\lambda)$ steht für die Exponential -Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Verteilung dessen Dichte $\lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$, und 0 for $x \leq 0$ ist.

Ex.: 1) Seien X und Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariabeln auf $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Sei X $exp(\lambda)$ verteilt, und Y μ_U verteilt. Schreiben Sie die Verteilungsfunktion F von $X + Y$.

Ex.: Seien $X_n := e^n 1_{[0,1/n]}$, für $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariabeln auf $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P\}$.

2) Untersuchen Sie die Konvergenz von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit P, für den Fall, wo P die Verteilung von $X + Y$ in Übung 1) ist.

3) Untersuchen Sie die Konvergenz von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit P, für den Fall, wo $P = \delta_0$

Ex.: 4) Finden Sie einen Beispiel von zwei Zufallsvariabeln X, Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ welche NICHT stochastisch unabhängig sind, und für die gilt, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{X = x\}$, $\{Y = y\}$ stochastisch unabhängig sind.

Ex.: Sei $p \in (0, 1)$ fixiert. X nehme Wert 10 mit Wahrscheinlichkeit p, und Wert -5 mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Ein Wertpapier $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ habe Wert 100 im ersten Monat. Es ändert sich jeden Monat um den Wert X_n, welcher wie X verteilt ist. X_n, für $n \in \mathbb{N}$, seien stochastisch unabhängig.

5) Sei $N \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $P(S_n - 100 < -N) \leq \frac{(n-1)(p+1)5}{N}$

6) Schreiben Sie die Verteilung des Wertpapiers $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, als Kombination von Delta Verteilungen.

7) Schreiben Sie die Verteilungsfunktion von S_3 und skizzieren Sie diese.

8) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ab einem Monat n das Wertpapier nur sinkt.

EX :

9) Sei $x_n = n^2$, $n \in N$. Definieren Sie die Konstanten c und c_n für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu := c \sum_n c_n \delta_{x_n}$ die Verteilung einer Zufallsvariabel X ist, welche endlichen ersten Moment hat, und dessen zweiter Moment nicht endlich ist.

10) Definieren Sie die Verteilung von $X - E[X]$.

EX :

11) Beweisen Sie, dass Konvergenz in $\mathcal{L}^2(\{\Omega, \mathcal{F}, P\})$ die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit auf $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ impliziert.

12) Beweisen Sie an Hand eines Gegenbeispieles, dass Konvergenz in Wahrscheinlichkeit auf $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ nicht die Konvergenz in $\mathcal{L}^2(\{\Omega, \mathcal{F}, P\})$ impliziert.

Bemerkung: alle Resultate müssen motiviert und bewiesen werden. Rechner oder eigene Blätter sind nicht erlaubt. Telefone oder andere elektronische Geräte müssen während der Klausur abgegen werden. Über Täuschungsversuche wird der Prüfungsauschuss umgehend informiert.