

Prof. Dr. Barbara Rüdiger  
Bergische Universität Wuppertal, Abgabe 14.01.2016

Übungszettel VI -W-Theorie

**Übung I:**

Sei  $X$  exponential mit Parameter  $\lambda$  verteilt. Finden Sie eine Folge von diskreten

Zufallsvariablen  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  die in Verteilung zu  $X$  konvergiert.

**Übung II:**

Finden Sie eine Folge von stetigen Verteilungen, die schwach zur Verteilung  $\delta_0$  konvergiert

**Übung III:**

Seien  $X_n$ , mit  $n \in \mathbb{N}$  gleich verteilte, stochastisch unabhängige, positive Zufallsvariablen, mit  $\mathbb{E}[\exp(\theta X_1)] = \exp(\lambda(\theta))$  für  $\theta \geq 0$ . Sei  $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . Beweisen Sie, dass

$$P(Z_n > \epsilon) \leq \exp(-\sup_{\theta \geq 0}(\theta\epsilon - \lambda(\theta)))$$

Tipp: Beweisen Sie zuerst eine Ungleichung für jedes  $\theta$  fixiert.

**Übung IV:**

Beweisen Sie, dass falls  $X_n \rightarrow X$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ , und  $Y_n \rightarrow Y$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ , dann

- a)  $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ ,
- b)  $X_n Y_n \rightarrow XY$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ .

**Übung V:**

Beweisen Sie, dass falls  $X_n \rightarrow X$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ , und  $Y_n \rightarrow X$  in Wahrscheinlichkeit  $P$ , dann  $X = Y$   $P$ -f.s.