Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, Abgabe 17.12.2015

Übungszettel V -W-Theorie

Übung I:
Sei $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in Z$, $\{c_n = \frac{c}{n(n+1)}\}$, und c so definiert, dass $\mu := \sum_n c_n \delta_{x_n}$ eine Verteilung ist. Finden Sie eine Folge von Zufallsvariabeln $\{X_n\}_{n \in N}$ für die gilt, dass X_n zu 0 in $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ für $p = 1$, aber nicht für $p = 3/2$, konvergiert.

Übung II:
Sei μ_C die Verteilung mit Verteilungsfunktion die Cantor -Funktion. Sei $X_n = 2^{n-1} 1_{[0, \frac{1}{3^n}]}$, für $n \in N$.

a) Erklären Sie für welche p, mit $1 \leq p < \infty$, X_n in $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_C)$ konvergiert.

b) Erklären Sie ob X_n μ_C -f.s. konvergiert.

Übung III:
Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Verteilung μ.

a) Beweisen Sie, dass $\mu(\{a\}) = 0$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\alpha \in [0, 1]$. Finden Sie das kleinste, bzw das grösste Intervall A und B so dass $\mu(A) = \alpha$, bzw $\mu(B) = \alpha$.

c) Definieren Sie eine F so, dass diese in $[-1, 1]$ konstant ist, und in $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ streng monoton wachsend ist. Berechnen Sie $\mu([-2, -1])$, $\mu([-1, 1])$, $\mu([1, 2])$.

Übung IV:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Massraum. Beweisen Sie

a) dass eine $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare positive Funktion genau dann μ- f.s. gleich Null ist, wenn dessen Integral bzgl μ gleich Null ist

a) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ impliziert $|f| < \infty$ μ -f.s.

Ungleichung von Jensen
Sei φ eine konvexe Funktion, $X, \varphi(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann gilt:

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

Bem $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konvex impliziert 1. Stetigkeit und 2. Monotonie, oder $\exists a \in \mathbf{R}$, so dass φ auf $]-\infty, a]$ monoton sinkend und auf $[a, \infty[$ monoton wachsend ist.

Übung V:
Beweisen Sie die Ungleichung von Jensen für den Fall, wo die Zufallsvariabel X Werte in einem Intervall $[A, B]$ hat.