Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, Abgabe 19.11.2015

Übungszettel II -W-Theorie

Notation:

a) $g \in \Sigma([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$

b) $g \in \Sigma_\infty([0,T])$, falls $g(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k \mathbf{1}_{A_k}(s)$, $A_k \in \mathcal{B}([0,T])$

c) $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ für f reellwertige messbare Funktion.

Übung I:

a) Beweisen Sie, dass für jede $\mathcal{B}([0,T])/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion g eine Folge von Funktionen $g_n \in \Sigma_\infty([0,T])$ existiert, so dass $lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_\infty = 0$

b) Beweisen Sie, dass $\Sigma([0,T])$ dicht in $\Sigma_\infty([0,T]) \cap \mathcal{L}^2([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda)$ in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ ist.

Übung II:

a) Seien X und Y reellwertige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass $max(X,Y)$ eine Zufallsvariable ist.

b) Seien X_n reellwertige Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass $sup(X_n)$ eine Zufallsvariable ist.

Übung III:

a) Schreiben Sie die Verteilung (als Kombination von Delta - Verteilungen) und Verteilungsfunktion von $B(n,p)$, $0 \le p \le 1$

b) Beweisen Sie, dass, falls X eine Zufallsvariabel ist, dessen Verteilungsfunktion F streng monoton und stetig ist, dann $F(X)$ uniform auf $[0,1]$ verteilt ist.

c) Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Verteilung μ. Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in [0,1]$ eine Borelsche Menge A existiert, für die gilt $\mu(a) = \alpha$

Sei $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Ereignissen auf dem W- Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man bezeichnet mit

$$limsup A_n := \cap_n \cup_{k>n} A_k, \quad liminf A_n := \cup_n \cap_{k>n} A_k, \qquad (1)$$

Übung IV:

Beweisen Sie , dass

a) $P(limsupA_n) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k>n} A_k)$ und $(liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k>n} A_k)$

b) $\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(limsupA_n)$ und $\liminf_{n\to\infty} P(A_n) \geq P(liminf A_n)$

Übung V:

a) Beweisen Sie: $\sum_n P(A_n) < \infty$ impliziert $P(limsupA_n) = 0$.

c) Man schreibt auch $P(A_n i.o.)$ anstatt $P(limsupA_n)$, wobei i.o. für "infinitely often " steht. Erklären Sie warum.

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.