Aufgabe G1.
Seien $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \Omega, \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \Omega, \emptyset\}$. Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ sind σ-Algebren.
(b) $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ ist keine σ-Algebra.

Aufgabe G2.
Sei Ω eine Menge mit $\sharp(\Omega) = \infty$, wobei $\sharp(\Omega)$ die Anzahl der Elemente in Ω bezeichnet. Zeigen sie, dass $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe G3.
Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Zeigen sie:
(a) $\{c\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für $\forall c \in \mathbb{R}$.
(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gehört jede der Intervallen (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$ zu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(c) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C} = \{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe G4
Beweisen Sie folgende Aussage:

Satz 1.3. Es sei I eine Indexmenge und für $\alpha \in I$ sei $\mathcal{F}_\alpha$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω, dann ist auch

$$\bigcap \mathcal{F}_\alpha = \{A \in 2^\Omega : \forall \alpha \in I : A \in \mathcal{F}_\alpha\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Aufgabe G5
a)
Es seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $Y \subset X$ und $\mathcal{A}|Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$. Dann ist $\mathcal{A}|Y$ eine σ-Algebra über Y.
b)
Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $\mathcal{U} := \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{U})$.

Aufgabe G6

Sei $a_i < b_i \quad \forall i = 1, \ldots, d$. Es seien

- $\mathcal{S}_d = \{]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_d, b_d]\} \cup \{\emptyset\}$
- $\hat{\mathcal{S}}_d = \{[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_d, b_d[\} \cup \{\emptyset\}$
- $\bar{\mathcal{S}}_d = \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\} \cup \{\emptyset\}$
- $\grave{\mathcal{S}}_d = \{]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[\} \cup \{\emptyset\}$

Beweisen Sie $\sigma\{\mathcal{S}_d\} = \sigma\{\hat{\mathcal{S}}_d\} = \sigma\{\bar{\mathcal{S}}_d\} = \sigma\{\grave{\mathcal{S}}_d\}$.

Aufgabe G7
Finden Sie eine reelle Funktion f mit sup f(x)=2, inf f(x)= 0 die Lebegues integrierbar aber nicht Riemann integrierbar ist. Beweisen Sie rigoros jede Aussage

Aufgabe G8

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die folgende Eigenschaft hat:

1) f ist in keinem Punkte stetig.
2) Für jedes $M > 0$ existiert $x_M \in \mathbf{R}$ mit $f(x_M) > M$
3) $\int f d\mu_L = 2$ wobei μ_L das Lebesgue-Maß ist.

Die Übungen werden am 11.11.2015 einzeln an die Tafel vorgetragen