Nachklausur Wahrscheinlichkeitstheorie WS15/16
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, 12.04.2016
Klausur

Übung I:
Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, 2^{\Omega})$, mit $\Omega = \{1, ..., N\}$, und $N \in \mathbb{N}$ fixiert.

a) Beweisen Sie, dass alle Elemente $\omega \in \times_{n\in\mathbb{N}}\Omega$ Elementarereignisse in der Produkt -σ- Algebra $\otimes_{n\in\mathbb{N}}2^{\Omega}$ sind.

b) Beweisen Sie, dass alle Elementarereignisse $\omega \in \times_{n\in\mathbb{N}}\Omega$ Wahrscheinlichkeit Null im Produktwahrscheinlichkeitsraum $(\times_{n\in\mathbb{N}}\Omega, \otimes_{n\in\mathbb{N}}2^{\Omega}, \otimes_{n\in\mathbb{N}}P)$ haben.

Übung II:

a) Sei X_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Zufallsvariabel welche den Wert 0 und den Wert n mit Wahrscheinlichkeit 1/2 annimmt . Untersuchen Sie die Konvergenz von X_n in Verteilung.

b) Geben Sie einen Bsp einer Folge von Zufallsvariabeln X_n , $n \in \mathbb{N}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ welche in Verteilung jedoch nicht in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Übung III:

a) Definieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Zufallsvariabel X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ welche exponential mit Parameter $\Lambda > 0$ verteilt ist.

b) Finden Sie eine Folge X_n , $n \in \mathbb{N}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ welche zu der Zufallsvariabel X in Übung a) in Wahrscheinlichkeit P konvergiert.

Übung IV:
Geben Sie ein Beispiel einer Verteilungsfunktion an, dessen Verteilung keine Dichte hat und Erwartungswert -3 hat. Beweisen Sie, dass diese keine Dichte hat.

Übung V: Sei X eine Zufallsvariabel auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\mu(dx)$$

wobei μ die Verteilung von X ist.

Übung VI:

a) Sei $p > 0$. Beweisen Sie, dass für eine Zufallsvariabel X mit Erwartungswert 0 auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ folgende Ungleichung gilt:

$$P(|X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{\epsilon^p}$$

b) Benutzen Sie a) um Implikationen zwischen Konvergenzen in L_p- Räumen und in Wahrscheinlichkeit auszusagen und zu beweisen.

Übung VII:

a) Beweisen Sie, dass die Summe von zwei stochastisch unabängigen zentrierten Gauss -verteilten Zufallsvariabeln eine zentrierte Gauss- verteilte Zufallsvariabel ist.

b) Sei X eine zentriert und Gauss verteilte Zufallsvariabel, und Y eine davon stochastisch unabhängige Zufallsvariabel. Beweisen Sie dass X+Y eine Dichte hat.

Hilfestellung: Die charakteristische Funktion von $\mathcal{N}(0, D)$ ist $\phi_D(z) = exp(-\frac{Dz^2}{2})$

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.
Jede Teilübung wird mit 3 Punkten bewertet.
Abgegebene Blätter ohne Namen werden nicht bewertet.
Elektronische Geräte jeder Art und eigene Blätter sind nicht erlaubt
Das Prüfungsamt und die Prüfungsauschusse werden über Täuschungsversuche informiert.