Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie WS15/16
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
Bergische Universität Wuppertal, 10.02.2016

Klausur

Übung I:
Sei X eine Zufallsvariabel , welche die Werte $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit Wahrscheinlichkeit $c\frac{1}{k^2}$ annimmt.

a) Definieren Sie c und bestimmen Sie auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Verteilungen μ_1 und μ_2 von X und $-X$.

b) Beweisen Sie, dass die charakteristische Funktion von μ_1 reellwertig ist.

c) Definieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wo zwei Zufallsvariabeln Y und Z mit jeweils Verteilung μ_1 und μ_2 definiert und stochastisch unabhängig sind. Geben Sie dabei die Zufallsvariabeln Y und Z an.

d) Definieren Sie eine Zufallsvariabel auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, welche Verteilung $\mu_1 \star \mu_2$ hat.

e) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $Y_n = (-1)^n Y$, in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung.

Übung II:
Sei X_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Zufallsvariabel welche uniform in $[-n, n]$ verteilt ist. Untersuchen Sie die Konvergenz von X_n in Verteilung.

Übung III:
Ein Wertpapier, der am 1.1.2016 1000 Euro wert ist, steigt jeden Monat um 30 Euro mit Wahrscheinlickeit 1/3 , sinkt um 10 Euro mit Wahrscheinlichkeit 1/3 und bleibt gleich mit Wahrscheinlichkeit 1/3, wobei die Änderungen in jedem Monat stochastisch unabängig sind. Sei W_n dessen Wert am Ende des n-ten Monats

a) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Fouriertransformierte von W_n.

b) Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Wertpapier ab einem bestimmten Zeitpunkt nie wieder steigen wird, Null ist.

c) Beweisen Sie, dass W_n/n in Verteilung konvergiert.

Übung IV:
Geben Sie ein Beispiel einer Verteilungsfunktion, dessen Median nicht eindeutig bestimmt ist, und geben Sie für dieses Bsp die Menge der Mediane an.

Übung V: Sei X eine Zufallsvariabel auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\mu(dx)$$

wobei μ die Verteilung von X ist.

Übung VI: Beweisen Sie, dass für eine Folge von Zufallsvariabeln $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt, dass für $p \geq 1$ die Konvergenz in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zu X auch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit- P zu X impliziert.

Hilfestellung: Def. α ist ein Median für die Zufallsvariabel X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und dessen Verteilungsfunktion F, falls $P(X \leq \alpha) \geq 1/2$ und $P(X \geq \alpha) \geq 1/2$

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.
Jede Teilübung wird mit 3 Punkten bewertet.
Abgegebene Blätter ohne Namen werden nicht bewertet.
Elektronische Geräte jeder Art und eigene Blätter sind nicht erlaubt
Das Prüfungsamt und die Prüfungsauschusse werden über Täuschungsversuche informiert.