Wahrscheinlichkeitstheorie
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
WS 2014/15

Blatt 8

Let the Legendre-Fenchel transformation (in the case of LDP it is the rate function) be defined as

$$I(x) = \Lambda^*(x) = \sup_\theta \{\theta x - \Lambda(\theta)\},$$

where $\Lambda(\theta) = \log M(\theta)$, where $M(\theta)$ is the moment generating function of a random variable. Solve the following problems for the two probability mass/distribution functions given below.

(i) Find the rate function $I(x)$?

(ii) At which point the rate function has a local minimum? Is it a global minimum and why?

(iii) Show that $D_{\Lambda^*} = D_I = \{z \in \mathbb{R} : I(z) < \infty\} =$ Range of (Λ'), where Λ' is the derivative of Λ.

Exercise I: Geometric Distribution: The probability mass function is given by

$$\mathbb{P}(X = x) = (1-p)^{x-1}p, x = 1, 2, 3, \cdots,$$

where p is the probability of success.

Exercise II: Gamma Distribution: The probability density function is given by

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0,$$

where

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

is the Gamma function.

Übung III: Beweisen Sie Chebyshev Ungleichung. (Einfach Vorlesung anschauen)

Übung IV: Beweisen Sie an Hand des Satzes von Karatheodory, dass falls F eine Verteilungsfunktion mit Dichte $p(x)$ ist, gilt, dass

$$\int x dF(x) = \int x p(x) dx.$$

(Einfach Vorlesung anschauen)

Übung V: Beweisen Sie: falls eine Folge von Zufallsvariabeln $\{Y_n\}_{n\in N}$ zu Y in Wahrscheinlichkeit konvergiert, so konvergiert in Wahrscheinlichkeit auch $\{f(Y_n)\}_{n\in N}$ zu $f(Y)$, falls f eine reellwertige stetige Funktion ist.

Übung VI: Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in Übung V nicht stimmt, falls f nur messbar aber nicht stetig ist.