Wahrscheinlichkeitstheorie
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
WS 2014/15

Blatt 6

Übung I:
Sei X eine reellwertige Zufallsvariabel.

a) Beweisen Sie, dass $E[|X|] < \infty$ falls und nur falls $-\infty < E[X] < \infty$.

b) Sei $1 \leq p < q < \infty$. Beweisen Sie an Hand der Jensen Ungleichung $E[|X|^p] < \infty$ falls $E[|X|^q] < \infty$

Übung II:
Finden Sie eine Zufallsvariabel X mit Sie $E[|X|] < \infty$ und $E[|X|^2] = \infty$ für den

Fall, dass

a) dessen Verteilung diskret ist, dh. eine Kombination von Delta-Verteilungen ist .

b) dessen Verteilung eine Dichte hat

Übung III*: Sei μ_U die uniforme Verteilung auf $[0,1]$. Finden Sie eine Zufallsvariabel X auf $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_U)$, für die gilt, dass $E[X] = 1$ und dass X nicht Riemann -integrierbar auf $[0,1]$ ist.

Übung IV:
Sei Zufallsvariable $X \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{y\to\infty} yE(1/X; X > y) = 0, \qquad \lim_{y\downarrow 0} yE(1/X; X > y) = 0.$$

Übung V:
Wir betrachten einen speziellen Fall der Chebyshev-Ungleichung: Ist X eine Zufallsvariable und $a \in (0, \infty)$, dann gilt

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|^2]}{a^2} \tag{1}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) (**Ungleichung** (1) **ist "sharp"**) für gegebene $0 < b \leq a$, $\exists X$ mit $EX^2 = b^2$ und $P(|X| \geq a) = b^2/a^2$.
(ii) (**Ungleichung** (1) **ist nicht "sharp"**) falls X hat $0 < EX^2 < \infty$, dann gilt

$$\lim_{a\to\infty} a^2 P(|X| \geq a)/EX^2 = 0.$$

Übung VI:
Seien $X_1, X_2, \cdots$ integrierbare Zufallsvariablen mit $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{E(X_n)\} > -\infty$ und $X_n \downarrow X$ f.s., wobei X auch eine Zufallsvariable ist. Zeigen Sie: X ist integrierbar und es gilt $E[|X_n - X|] \to 0$ als $n \to \infty$.