Wahrscheinlichkeitstheorie
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
WS 2014/15

Blatt 3

Übung I:

a) Definieren Sie eine Verteilungsfunktion (Ihrer Wahl), welche stetig ist, und keine Dichte hat.

b) Sei μ dessen Verteilung. Berechnen Sie $\mu((1/9, 2/3))$.

Sei $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Ereignissen auf dem W- Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man bezeichnet mit

$$limsup A_n := \cap_n \cup_{k>n} A_k, \quad liminf A_n := \cup_n \cap_{k>n} A_k, \tag{1}$$

Übung II:

Beweisen Sie , dass

a) $P(limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k>n} A_k)$ und $(liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k>n} A_k)$

b) $\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P(limsup A_n)$ und $\liminf_{n\to\infty} P(A_n) \ge P(liminf A_n)$

c) Man schreibt auch $P(A_n i.o.)$ anstatt $P(limsup A_n)$, wobei i.o. für "infinitely often " steht. Erklären Sie warum.

Übung III:

Beweisen Sie: $\sum_n P(A_n) < \infty$ impliziert $P(limsup A_n) = 0$.

Übung IV:

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, und $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ eine Funktion für die gilt

a) $P(\Omega) = 1$

b) P ist additiv

c) Falls $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, und $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(UA_n). \tag{2}$$

Beweisen Sie, dass P ein W-Ma auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.
Übung V:

Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Verteilung μ. Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in [0, 1]$ eine Borelsche Menge A existiert, für die gilt $\mu(a) = \alpha$