Definition 1.1. Es sei Ω eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ über Ω heißt **Algebra über Ω**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Ist die Algebra sogar stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen, das heißt es gilt sogar $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$, so spricht man auch von einer **σ-Algebra** über Ω

Korollar 1.2. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über Ω, dann gilt

(i) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, so gilt zusätzlich: $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap A_n \in \mathcal{A}$

Übung I: Beweisen Sie Korollar 1.2.

Korollar 1.9. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Dann gelten folgende Eigenschaften

(i) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(ii) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

(iii) $A \subset B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Übung II.: Beweisen Sie Korollar 1.9

Übung

III. Beweisen Sie: Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Sei $A \subset \Omega$. Dann is

$$\mathcal{F}_A \equiv \{B = A \cap C : C \in \mathcal{F}\}$$

eine σ-Algebra auf A

Erinnerung: de Morgan Es gelten die Gesetze von de Morgan bezüglich der Mengenlehre:

1.
$$\bigcup B_k^{\complement} = \left(\bigcap B_k\right)^{\complement}$$

2.
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^{\complement} = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^{\complement}$$

Übung IV. Beweisen Sie die De Morgan Gesetze

Übung V. : Sei

$$A \subset B$$

Bilden Sie die kleinste

σ-Algebra

a) auf B ; b) auf B, die A enthält

Notation

- Sei Ω eine Menge. Die „Potenzmenge" von Ω ist die Menge aller Teilmengen von Ω, $2^{\Omega} = \{A : A \subseteq \Omega\}$.
- Sei Ω eine Menge mit endlich vielen Elementen. Der „Betrag von Ω" $|\Omega|$ ist die Anzahl der Elemente in Ω.

Satz Gegeben sei eine Menge Ω mit $|\Omega| = n$. Dann gilt $\left|2^{\Omega}\right| = 2^{|\Omega|} = 2^n$.

Übung VI. a) Beweisen Sie den Satz; b) Beweisen Sie: die Potenzmenge einer Menge ist immer eine

σ-Algebra

Übung VII. Beweisen Sie , dass folgende Funktion ein W -Maß ist, und beschreiben Sie den ganzen W -Raum.

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{R}$$