Rekurrente Markovketten

Im vorigen Vortrag wurde der Begriff der Rekurrenz einer Markovkette eingeführt. Diesen wollen wir jetzt genauer untersuchen. Im Folgenden sei immer $\{X_n | n \in \mathbb{N}^0\}$ eine homogene Markovkette.

Definition 1. *(i) Eine Zufallsvariable T heißt Stoppzeit, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *das Ereignis* $\{T = n\}$ *von* $\{X_0, X_1, .., X_n\}$ *festgelegt wird.*
(ii) Ein Ereignis ist früher als T, wenn es von $\{X_0, X_1, .., X_{T-1}\}$ *festgelegt wird.*
(iii) Ein Ereignis ist später als T, wenn es von $\{X_{T+1}, X_{T+2}, ..\}$ *festgelegt wird.*

Definition 2. *(starke Markov Eigenschaft) Ein stochastischer Prozess* $\{X_n | n \in \mathbb{N}^0\}$ *hat die starke Markov-Eigenschaft, wenn für alle Stoppzeiten T, alle Ereignisse A früher als T und B später als T gilt:*

$$P\{B | X_T = i; A\} = P\{B | X_T = i\};$$

und insbesondere für alle Zustände i und j:

$$P\{X_{T+1} = j | X_T = i; A\} = p_{ij}.$$

Bemerkung 3. *Die schwache Markov-Eigenschaft induziert die starke, obwohl sie scheinbar schwächer ist. Andersrum ist die schwache Markov Eigenschaft ein Spezialfall der starken, da wir T als konstante Zufallsvariable wählen können. Damit sind die beiden Eigenschaften äquivalent und wir können die starke Markov Eigenschaft bei homogenen Markovketten verwenden.*

Theorem 4. *Für jeden Zustand i gilt:*

$$q_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ rekurrent} \\ 0 & \text{falls } i \text{ nicht rekurrent} \end{cases}$$

,wobei $q_{ij} = P_i\{X_n = j \text{ für unendlich viele } n\} = P_i\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} [X_n = j]\}$

Beweis. Sei $X_0 = i$ und $\alpha = f_{ii}^*$ die Wahrscheinlichkeit wenigstens ein mal zu i zurückzukehren. Weiter sei R_m das Ereignis wenigstens m mal zu i zurückzukehren. Dann folgt, dass $P(R_2|R_1) = P(R_1) = \alpha$, da nach der ersten Wiederkehr zu i, die Vergangenheit irrelevant wird. Das folgt aus der starken Markov-Eigenschaft, da der Zeitpunkt der ersten Wiederkehr gerade T_i ist und $\{T_i = n\} = \{X_\nu \neq i \text{ für } 1 \leq \nu \leq n-1; X_n = i\}$ nur von $\{X_0, X_1, .., X_n\}$ abhängt, wonach T_i eine Stoppzeit ist. Folglich:
$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \alpha^2$,
Per Induktion über $m \geq 1$ folgt dann:
$P(R_{m+1}) = P(R_m \cap R_{m+1}) = P(R_m)P(R_{m+1}|R_m) = \alpha^m \cdot \alpha = \alpha^{m+1}$. Damit ist dann $\forall i \in I$:
$q_{ii} = \lim_{m\to\infty} P(R_m) = \lim_{m\to\infty} \alpha^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = 1 \\ 0 & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases}$ □

Korollar 5. *Für jeden Zustand $i, j \in I$ gilt:*

$$q_{ij} = \begin{cases} f_{ij}^* & \textit{falls j rekurrent} \\ 0 & \textit{falls j nicht rekurrent} \end{cases}$$

Beweis. Einen Zustand unendlich oft zu erreichen bedeutet ihn wenigstens einmal zu betreten und dann unendlich oft zurückzukehren. Damit folgt die Beziehung

$$q_{ij} = f_{ij}^* q_{jj}$$

und schließlich mit Theorem 4 die Behauptung. □

Theorem 6. *Ist i rekurrent und $i \rightsquigarrow j$, dann:*

$$q_{ij} = q_{ji} = 1$$

Beweis. Definiere die Ereignisse A = {i unendlich oft betreten}, B = {j wenigstens einmal betreten}. Dann ist:
$P_i(A) = q_{ii} = 1$ nach Theorem 4;
$P_i(B^C) = 1 - f_{ij}^*$;
$P_i(A \cap B) = f_{ij}^* q_{ji}$.

Letzteres folgt aus der starken Markov Eigenschaft, angewendet auf den ersten Eintrittszeitpunkt in den Zustand j. Weiter folgt mit der Monotonie des W-Maßes P:
$1 = q_{ii} = P_i(A) \leq P_i(B^C) + P_i(A \cap B) = 1 - f_{ij}^* + f_{ij}^* q_{ji} \Leftrightarrow f_{ij}^* \leq f_{ij}^* q_{ji}$.
Da $f_{ij}^* > 0$ ($i \rightsquigarrow j$), ist $1 \leq q_{ji} \leq f_{ji}^*$. Also ist $f_{ji}^* = 1$ und $j \rightsquigarrow i$.

j ist also auch rekurrent, da i und j kommunizieren. Die Behauptung folgt dann durch vertauschen von i und j. $\square$

Folgerung 7. *In einer rekurrenten Klasse gilt $q_{ij} = q_{ji} = 1$ für alle i,j in der Klasse.*

Beispiel 8. *Sei $I = \mathbb{Z}$ und $p_{ij} = \begin{cases} p & \text{falls } j = i+1 \\ q & \text{falls } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $p, q \in \mathbb{R}^+$ und $p + q = 1$ der freie "Random Walk".*
Offensichtlich ist dann $p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2n}{n} p^n q^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$, ersteres nach Bernoulli's Formel.
Da n Schritte nach rechts und links in beliebiger Reihenfolge nötig sind, um wieder in den Ausgangszustand zu gelangen.
Jetzt ergibt sich mit der Definition des Binomialkoeffzient und Erweiterung mit $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$:
$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{j - \frac{1}{2}}{j} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.
Jetzt erhalten wir die Generatorfunktion mit obiger Gleichung und binomischer Reihe:
$P_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pqz^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4pqz^2)^n = (1 - 4pqz^2)^{-\frac{1}{2}}$. *Dann folgt:*
$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = P_{ii}(1) = \lim_{z \uparrow 1} P_{ii}(z) = \lim_{z \uparrow 1} (1 - 4p(1-p)z^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \infty & \text{falls } p = \frac{1}{2} \\ c & \text{falls } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$, *wobei* $|c| < \infty$.
Also ist $f_{ii}^* = 1$ beziehungsweise i rekurrent, wenn $p = \frac{1}{2}$ und sonst nicht. Dieses gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$. Demnach ist der Random Walk rekurrent genau dann, wenn er symmetrisch ist.

Bemerkung 9. *Im Folgenden gehen wir jetzt immer von einer rekurrenten Markovkette, beziehungsweise einer Markovkette mit rekurrentem Zustandsraum aus und untersuchen das Verhalten der $p_{ij}^{(n)}$, wobei $n \to \infty$. Ziel ist es stabile Zustände (Verteilungen) zu finden.*

Definition 10. *(i) $\xi_\nu(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_\nu = j \\ 0 & \text{falls } X_\nu \neq j \end{cases}$ mit $\mathbb{E}_i[\xi_\nu(j)] = p_{ij}^{(\nu)}$*

(ii) $N_n(j) = \sum_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(j)$ ist die totale Besetzungszeit des Zustands j und

$\mathbb{E}_i[N_n(j)] = \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)}$ *die totale erwartete Besetzungszeit.*

(iii) $m_{jj} = \mathbb{E}_j[T_j] \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{jj}^{(\nu)}$ *ist die erwartete Rückkehrzeit von j nach j.*

Theorem 11. *(Tauber Theorem) [ohne Beweis]*
Ist $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *mit* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *eine für* $0 \leq z < 1$ *konvergente Reihe, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \lim_{z\to 1}(1-z)A(z)$$

Theorem 12. *Für jeden Zustand* $i, j \in I$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)} = \tfrac{1}{m_{jj}}$$

Beweis. Wir benutzen das Tauber Theorem, wobei wir wählen:
$A(z) := P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n = F_{ij}(z)P_{jj}(z) = \frac{F_{ij}(z)}{1-F_{jj}(z)}$.
Dann folgt mit dem Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)} = \lim_{z\to 1}(1-z)P_{ij}(z) = F_{ij}(1) \lim_{z\to 1} \tfrac{1-z}{1-F_{jj}(z)} \overset{f_{ij}^*=1}{=} \lim_{z\to 1} \tfrac{1-z}{1-F_{jj}(z)}$$
$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{z\to 1} \tfrac{1}{F_{jj}'(z)} = \tfrac{1}{F_{jj}'(1)} = \tfrac{1}{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{jj}^{(\nu)}} = \tfrac{1}{m_{jj}}$$
□

Bemerkung 13. *Im Folgenden sei* $I = \{1, 2, ..., l\}$ *mit* $l \in \mathbb{N}$. *Wir betrachten also eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum.*

Definition 14. *Sei* $x = (x_1, ..., x_l)$ *ein Zeilenvektor mit l Komponenten und* Π *eine lxl Übergangsmatrix. Dann ist*

$$x = x\Pi \text{ oder } x(E_l - \Pi) = 0 \tag{0.1}$$

eine "stationärer-Zustand"-Gleichung.

Theorem 15. *Ist I endlich und eine Zustandsklasse. Dann ist die Kette rekurrent.*

Beweis. Andernfalls sind alle Zustände nicht rekurrent. Für alle $i \in I$ existiert also ein $n_i \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{\nu=1}^{l} p_{\nu i}^{(n)} = 0\ \forall n \geq n_i$. Da I endlich ist existiert also ein $n_0 = max\{n_i | i \in I\}$, sodass $\sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(n_0)} = 0$. Das Partikel hat also ab einem bestimmten Zeitpunkt keine Möglichkeit mehr im Zustandsraum zu bleiben, was einen Widerspruch darstellt. □

Theorem 16. *Ist I endlich und bildet eine Zustandsklasse, dann gilt:*

(i) $w = (w_i | i = 1, .., l) := (\frac{1}{m_{ii}} | i = 1, ..., l)$ *löst 0.1,*

(ii) $\sum_{i=1}^{l} w_i = 1$,

(iii) $w_j > 0$ *für* $j = 1, .., l$,

(iv) jede Lösung von 0.1 ist ein Vielfaches von w.

Beweis. $\underline{Ad\ (i):}$

Es gilt: $p_{ik}^{(\nu+1)} = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(\nu)} p_{jk} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ik}^{(\nu+1)} = \sum_{j=1}^{l} (\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)}) p_{jk}$. Dann:

$$w_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} p_{ik}^{(\nu)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ik}^{(\nu+1)} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{p_{ik}^{(0)} - p_{ik}^{(\nu+1)}}{n+1}}_{=0,\ da\ Z\ddot{a}hler\ beschr\ddot{a}nkt}$$

$$= \sum_{j=1}^{l} (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)}) p_{jk} = \sum_{j=1}^{l} w_j p_{jk}$$

Der Limes durfte oben beliebig verschoben werden, weil I endlich ist und damit alle Summen endlich sind. So ist dann $w = w\Pi$ und w erfüllt 0.1.

$\underline{Ad\ (ii):}$

$$\sum_{j=1}^{l} w_j = \sum_{j=1}^{l} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{ij}^{(\nu)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(\nu)}}_{=1} = 1.$$

Wieder kann der Limes und die endliche Summe vertauscht werden.

$\underline{Ad\ (iii):}$

Aus 2 folgt, dass $\exists i \in \{1, .., l\} : w_i > 0$. Weiter ist $\forall k \in \{1, .., l\} : i \rightsquigarrow k$, also $\exists n \in \mathbb{N} : p_{ik}^{(n)} > 0$. Daraus folgt $w_k = \sum_{j=1}^{l} w_j p_{jk}^{(n)} > 0$, wobei die Summe aus $w = w\Pi^n$ durch iteratives Einsetzen folgt. $\underline{Ad\ (iv):}$

Sei x eine Lösung von 0.1. Dann ist $x = x\Pi^\nu \ \forall \nu \geq 1$.

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} x\Pi^\nu$. In Komponenten:

$$x_k = \sum_{j=1}^{l} x_j (\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} p_{jk}^{(\nu)}) \overset{n\to\infty}{\to} (\underbrace{\sum_{j=1}^{l} x_j}_{=:c>0}) w_k$$ □

Bemerkung 17. $\{w_j | j \in I\}$ *heißt auch die stationäre Verteilung. Das Theorem garantiert uns also eine stationäre Verteilung mit den Eigenschaften (ii) und (iii), wenn der Prozess endlich ist und sein Zustandsraum eine rekurrente Klasse bildet.*

Theorem 18. *Angenommen* $\forall j \in I : P\{X_0 = j\} = w_j$. *Dann ist* $P\{X_n = j\} = w_j \; \forall n \geq 1$. *Weiter ist:*
$P\{X_{n+\nu} = j_\nu | 0 \leq \nu \leq l\} = P\{X_{m+\nu} = j_\nu | 0 \leq \nu \leq l\}$ *für alle* $m, n \geq 0$ *und künstliche* j_ν.

Beweis. $P\{X_n = j\} = \sum_i P\{X_0 = i\} P_i\{X_n = j\} = \sum_i w_i p_{ij}^{(n)} = w_j$. Ähnlich:
$P\{X_n = j_0\} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{l-1} j_l} = w_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{l-1} j_l}$ ist unabhängig von n. □

Bemerkung 19. *(i) Also ist der Prozess mit der stationären Verteilung als Anfangsverteilung stationär.*
(ii) Zur Lösung von 0.1 schreibe $w_j = c_j w_1$ *und berechne dann die Lösungen wie folgt:*

$$w_j = \frac{c_j}{\sum_{j=1}^{l} c_j} \text{ für } 1 \leq j \leq l.$$

Beispiel 20. *Wir betrachten einen Schalter, der die Zustände an (1) oder aus (2) haben kann. Sei also* $I = \{1, 2\}$ *und*

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen bezüglich 0.1 ergeben sich dann:

$$(1 - p_{11})x_1 - p_{21}x_2 = 0$$
$$-p_{12}x_1 + (1 - p_{22})x_2 = 0$$

Die erste Gleichung aufgelöst ergibt dann:

$$x_2 = \frac{1-p_{11}}{p_{21}} x_1 = \frac{p_{12}}{p_{21}} x_1$$

Dann ist:

$$w_1 = \frac{1}{1+\frac{p_{12}}{p_{21}}} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}$$
$$w_2 = \frac{\frac{p_{12}}{p_{21}}}{1+\frac{p_{12}}{p_{21}}} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}$$

Bemerkung 21. *Jetzt wollen wir uns dem Fall widmen, dass I nicht nur aus rekurrenten Zuständen besteht. Sei dazu* $I = R \cup T$, *wobei R die Menge aller rekurrenten und T die Menge aller nicht rekurrenten Zustände ist.*

Definition 22. *Eine Menge von Zuständen heißt geschlossen, wenn ausgehend von einem Zustand aus der Menge das Partikel in der Menge bleibt.*

Folgerung 23. *(i) Eine rekurrente Klasse ist geschlossen. Also bleibt ein Partikel, das die Klasse einmal betritt für immer dort.*
(ii) Eine endliche Menge von nicht rekurrenten Zuständen ist nicht geschlossen.
(iii) Ist T endlich, so betritt das Partikel womöglich eine rekurrente Klasse.
(iv) Im Allgemeinen wird das Partikel von der rekurrenten Klasse mit Wahrscheinlichkeit α "absorbiert"oder bleibt für immer in T mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$.

Beweis. $\underline{Ad\ (i):}$
Das Partikel kann zu keinem nicht rekurrenten Zustand gehen nach Theorem, sonst wären beide Zustände schon rekurrent. Zudem kann es zu keinem rekurrenten Zustand in einer anderen Klasse gehen, weil diese nicht kommunizieren.
$\underline{Ad\ (ii):}$
Siehe Beweis von Theorem 15.(Das Partikel kann nur eine endliche Zeit in einem endlichen nicht rekurrenten Zustandsraum verbringen).
$\underline{Ad\ (iii):}$
Folgt direkt aus (ii).
$\underline{Ad\ (iv):}$
Offensichtliche Alternative von (i). Siehe Beispiel 8 mit $p > \frac{1}{2}$. □

Definition 24. *Sei $i \in T$, C eine rekurrente Klasse und $n \geq 1$. Dann definiere*

$$(i) y_i^{(n)} = \sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = P_i\{X_n \in C\} \tag{0.2}$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel zum Zeitpunkt in in C ist.
(ii) $y_i = \lim_{n\to\infty} y_i^{(n)} = P_i\{X_n \in C \text{ für einige } n \geq 1\}$ definiert die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel von C absorbiert wird.

Bemerkung 25. *C ist geschlossen. Also ist das Partikel, wenn es zum Zeitpunkt n in C ist auch zum Zeitpunkt n+1 in C sein. Daher ist $y_i^{(n)} \leq y_i^{(n+1)}$ eine montone durch 1 beschränkte Folge. Also macht (ii) Sinn.*

Theorem 26. *Die y_i erfüllt das Gleichungssystem:*

$$x_i = \sum_{j \in T} p_{ij} x_j + \sum_{j \in C} p_{ij}, i \in T. \tag{0.3}$$

Falls T endlich ist, ist y_i die eindeutige Lösung des Systems.

Beweis. Sei das Partikel zu Anfang in Zustand i und nach einem Schritt im Zustand j. Jetzt gibt es 3 Möglichkeiten für den Zustand j:
1. $j \in T$: Dann ist die Absorptions-Wahrscheinlichkeit y_j nach der Markov Eigenschaft.
2. $j \in C$: Dann ist das Partikel schon absorbiert.
3. $j \in (I \setminus T) \setminus C$: Dann wird das Partikel nie absorbiert.
Insgesamt erhalten wir also für die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel absorbiert wird:

$$y_i = \sum_{j \in T} p_{ij} y_j + \sum_{j \in C} p_{ij} \cdot 1 + \sum_{j \in (I \setminus T) \setminus C} p_{ij} \cdot 0.$$

Sei jetzt $T = \{1, 2, ..., t\}$. Setze Π_T die Einschränkung der Übergangsmatrix auf den Zustandsraum T und $y^{(1)}$ die $y_i^{(1)}$ aus 0.2. Dann lässt sich das Gleichungssystem schreiben als:

$$(E_T - \Pi_T)x = y^{(1)}$$

Zu zeigen ist also jetzt, dass $(E_T - \Pi_T)$ regulär ist.
Angenommen $(E_T - \Pi_T)$ ist singulär. Dann $\exists v = (v_1, ..., v_t)^T \neq 0$, sodass $v = \Pi_T v$. Also folgt per Iteration für alle $n \geq 1$: $v = \Pi_T^n v$. Also in Komponenten für , $i \in T$:

$$v_i = \sum_{j=1}^{t} p_{ij}^{(n)} v_j$$

Da j nicht rekurrent, ist $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, also $v_i = 0$ für alle $i \in T$ im Widerspruch zur Annahme. □

Beispiel 27. *Sei die Übergangsmatrix gegeben wie folgt [CA02]: Dann ist $T = \{1, 2, 3\}$und*

$$\begin{array}{c|ccc:cc:cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\
2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & \\
3 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} & \cdots & \\
\hdashline
4 & & 0 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 & & \\
5 & & & & 1 & 0 & & & & \\
\hdashline
6 & & 0 & & \multicolumn{2}{c:}{0} & & R_2 & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Abbildung 0.1: Übergangsmatrix Beispiel 27

$R_1 = \{4, 5\}$, R_2 2 unabhängige rekurrente Klassen. Dann ergeben sich die Absorptionswahrscheinlichkeiten nach R_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}, \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}, \\ x_3 &= \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Beziehungsweise:

$$x_1 = \tfrac{26}{33}, x_2 = \tfrac{2}{3}, x_3 = \tfrac{25}{33}$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeiten von R_2 sind dann:

$$\tilde{x}_1 = 1 - x_1 = \tfrac{7}{33}, \tilde{x}_2 = 1 - x_2 = \tfrac{1}{3}, \tilde{x}_3 = 1 - x_3 = \tfrac{8}{33}.$$

Literaturverzeichnis

[CA02] Chung, Kai L.; Aitsahlia, Farid: *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*. 4.Edition. Springer, 2002