Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik - Stochastik

Dr. Peng Jin
M.Sc. Brice Hakwa

Übungen zur Finanzmathematik (WS 2014/15)

Blatt 9 04.12.2014

Im folgenden betrachten wir stets ein CRR-Modell $\left(n, \mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t=0,\cdots,n}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$ mit den Parametern $r > -1,\ s > 0,\ d > 0,\ u > d$.

Aufgabe 1: (4Pts)
Sei $H = \binom{x_t}{y_t}_{t=1,\cdots,n}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie und sei $\left(V_t(H)\right)_{t=0,\cdots,n}$ der Wertprozess von H. Zeigen Sie:

$$V_t\left(H\right) = V_0\left(H\right) + \sum_{i=1}^{t}\left(x_i \Delta S_i^0 + y_i \Delta S_i^1\right) \quad \text{für alle} \quad t = 1, \cdots, n,$$

wobei $\Delta S_i^0 := S_i^0 - S_{i-1}^0,\ \ \Delta S_i^1 := S_i^1 - S_{i-1}^1,\ \ i = 1, \cdots, n.$

Aufgabe 2: (4Pts)
Sei $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeigen Sie: Der diskontierte Preisprozess $\left(\underset{\sim}{S}_t^1\right)_{t=0,\cdots,n}$ ist genau dann ein $\mathbb{Q}$-Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\cdots,n}$, falls

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\zeta_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = r + 1, \quad \forall\ t = 0, \cdots, n-1,$$

wobei $\zeta_t := \frac{S_t^1}{S_{t-1}^1},\ \ t = 1, \cdots, n.$

Aufgabe 3: (4Pts)
Seien $\mathbb{Q} \in \mathbb{P}^*$ (d.h. $\mathbb{Q}$ ist ein äquivalentes Martingalmaß) und $H = \binom{x_t}{y_t}_{t=1,\cdots,n}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Sei $\left(V_t(H)\right)_{t=0,\cdots,n}$ der Wertprozess von H. Zeigen Sie: Der diskontierte Wertprozess

$$\left(\underset{\sim}{V}_t(H)\right)_{t=0,\cdots,n} := \left(\frac{V_t\left(H\right)}{S_t^0}\right)_{t=0,\cdots,n}$$

ist $\mathbb{Q}$-Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\cdots,n}$.

Aufgabe 4: (4Pts)
Gegeben sei ein CRR-Modell mit der Periode $n \geq 2$ und den Parametern $r > -1,\ s > 0,\ d > 0,\ u > d$. Dann gilt:

(1) Falls $r + 1 \leq d$, dann ist $H = \binom{x_t}{y_t}_{t=1,\cdots,n}$ mit
$$x_t = -s,\ y_t = 1 \quad \text{für } t = 0, \cdots, n-1$$
und
$$x_n = \frac{S^1_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} - s, \quad y_n = 0$$
eine Arbitrage.

(2) Falls $r + 1 \geq u$, dann ist $H = \binom{x_t}{y_t}_{t=1,\cdots,n}$ mit
$$x_t = s,\ y_t = -1 \quad \text{für } t = 0, \cdots, n-1$$
und
$$x_n = s - \frac{S^1_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}, \quad y_n = 0$$
eine Arbitrage.

Abgabe: bis 11.12.14, 10:00 Uhr, in Zimmer G.16.03