Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik - Stochastik

Dr. Peng Jin
M.Sc. Brice Hakwa

Übungen zur Finanzmathematik (WS 2014/15)

Blatt 8 27.11.2014

Aufgabe 1: (4Pts)
Sei $X_n := a_n$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ eine wachsende Zahlenfolge, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$ sei konstant und $a_{n+1} \geq a_n, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Sub-Martingal bzgl. jeder Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 2: (4Pts)
Sei $S_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$ mit $\zeta_j \in L^1(\mathbb{P})$ i.i.d. (d.h. $\zeta_j,\ j \in \mathbb{N}$ sind unabängig identisch verteilt) und sei $\mathcal{F}_n := \sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Beweisen Sie:

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal $\Leftrightarrow \quad E[\zeta_1] = 0$
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Sub-Martingal $\Leftrightarrow \quad E[\zeta_1] \geq 0$
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Super-Martingal $\Leftrightarrow \quad E[\zeta_1] \leq 0$

Aufgabe 3: (4Pts)
Seien $\zeta_j \geq 0$ i.i.d. (d.h. $\zeta_j,\ j \in \mathbb{N}$ sind unabängig identisch verteilt) mit $E[\zeta_1] = 1$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, und $M_n := \prod_{i=1}^{n} \zeta_i$. Seien $M_0 := 1, \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal ist.

Aufgabe 4: (4Pts)
Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und sei $X \in L^1$. Definiere

$$M_n := E[X|\mathcal{F}_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal ist.

Abgabe: bis 04.12.14, 10:00 Uhr, in Zimmer G.16.03