Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **WS 2011/2012**

Nachklausur Wahrscheinlichkeitstheorie am 22.03.2012

Aufgabe 1: Sei $X_n = 2^n \mathbf{1}_{]0,5-\frac{1}{2^n};0,5]}$ Untersuchen Sie die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nach Konvergenz

a) P - fast sicher

b) in Wahrscheinlichkeit

c) in L_1

für den Fall wo

I. P die uniforme Verteilung auf $[0;1]$ ist ;

II. $P = \delta_{\frac{1}{2}}$.

[12 Punkte]

Aufgabe 2: Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$; $n \in \mathbf{N}$.
Sei $C = \{A \times B : A \subseteq S, B \subseteq S\}$
Beweisen Sie: $\sigma(C) = 2^{S\times S}$

[4 Punkte]

Aufgabe 3: Sei $\sum_1^\infty a_k(x)$ eine Reihe, Wobei $a_k(x) \geq 0$ Lebesgue-messbar ist für jedes $k \geq 1$, Beweisen Sie:

(a)

$$\int \sum_1^\infty a_k(x)dx = \sum_1^\infty \int a_k(x)dx$$

(b) Wenn $\sum_1^\infty \int a_k(x)dx < \infty$, dann ist die Reihe $\sum_1^\infty a_k(x) < \infty$ für μ - fast alle x, mit μ Lebesgue-Maß.

[3 Punkte]

Aufgabe 4: Sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{für} \quad -2 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \text{für} \quad \frac{1}{4} \leq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

b) Finden Sie die Verteilung μ zur Verteilungsfunktion F.

[4 Punkte]

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar.

a) Beweisen Sie $f(g)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar.

b) Beweisen Sie $\int f \delta_{x_0} = f(x_0)$, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

[4 Punkte]

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Fouriertransformierte von einer Zufallsvariabel, die Poisson verteilt ist, mit Parameter 2.

[2 Punkte]

- Maximale Punktzahl 29 Punkte, Sie bekommen die Note eins bei 27 Punkten.
- Zeit: 90 Minuten.
- Sie dürfen keinen Rechner benutzen.
- Es darf nur auf Blättern mit Stempel geschrieben werden.
- Abgabe ist Pflicht.