Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **WS 2011/2012**

Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie am 03.02.2012

Aufgabe 1: Sei $\Omega = \mathbf{N}$. Bestimmen Sie irgend ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, 2^\Omega)$ und eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, 2^\Omega, P)$, so dass

$$E[X^4] < \infty$$

$$E[|X|^5] = \infty$$

[4 Punkte]

Aufgabe 2:

a) Beweisen Sie $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, wobei $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ mit $\mathcal{S} = \{]a,b] : a < b\}$

b) Beweisen Sie $\sigma(S) = \sigma(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{[a,b] : a < b\}$

[4 Punkte]

Aufgabe 3: Sei μ eine Verteilung mit Dichte $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$. Beweisen Sie

$$\mu(\mathbf{N}) = 0$$

wobei $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

[4 Punkte]

Aufgabe 4: Sei

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad X < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{für} \quad -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{für} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

b) Finden Sie die Verteilung μ zur Verteilungsfunktion F.

[4 Punkte]

Aufgabe 5:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar,

(a)Beweisen Sie $f + g$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar. [2 Punkte]

(b)Beweisen Sie $\int f\delta_{x_0} = f(X_0)$, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]

(c)Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen.So dass bzgl, des Lebesgue Mass μ_L gilt,
-$f_n(x) \geq 0$,
-$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ f. s.
Stimmt es dann, dass
$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)d\mu_L = \int f(x)d\mu_L$? [2 Punkte]
(Begründen Sie Ihre Aussage)

Aufgabe 6:
Beweisen Sie: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X ein Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
$X_n \to^{L_1} X \Rightarrow X_n \to^{P} X$. [2 Punkte]

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die Fouriertransformierte von einer Zufallsvariablen, die Poisson verteilt ist, mit Parameter 1. [2 Punkte]

- Maximale Punktzahl 26 Punkte, Sie bekommen die Note eins bei 24 Punkten.
- Zeit: 90 Minuten.
- Sie dürfen keinen Rechner benutzen.
- Es darf nur auf Blättern mit Stempel geschrieben werden.