Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea
Einführung in die Stochastik
WS 2010/11

Übungsklausur

- Schreiben Sie **auf jedes (!) Blatt** leserlich Namen und Matrikel-Nr.
- Die letzten zwei Aufgaben, d. h. Aufgabe V. und VI. sollen auf einem separaten Blatt gelöst werden, da sie separat von Herrn Prof. Diepenbrock korrigiert werden.
- Bei der Abgabe müssen Sie eine Unterschrift auf unserer Liste leisten.
- Sie bekommen die Note eins, wenn Sie insgesamt mindestens 24 von 32 Punkten erreicht haben.
- Alle Lösungen müssen begründet werden.
- **Füllen Sie vor Abgabe diese Tabelle aus:**

Name, Vorname:...

Matrikelnummer:..

Email……………………………………………………………

	Bearbeitet	Nicht bearbeitet
Aufgabe I	☐	☐
Aufgabe II	☐	☐
Aufgabe III	☐	☐
Aufgabe IV	☐	☐
Aufgabe V	☐	☐
Aufgabe VI	☐	☐

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik/Stochastik
Prof. Dr. Barbara Rüdiger **WS 2010/11**

Einführung in die Stochastik - Übungsklausur

Aufgabe I. Ein fairer Würfel wird immer wieder geworfen. Beschreibe X der erste Wurf, in dem die 2 fällt, und Y der letzte Wurf in dem die 2 nicht fällt.

a) Definieren Sie die Verteilung μ_X der Zufallsvariabel X und μ_Y der Zufallsvariabel Y. [2 Punkte]

Hilfestellung: Geben Sie jeweils vorher genau den Werteraum an!

b) Berechnen Sie $P(\{X = k\}/\{Y = j\})$ für alle möglichen Werte k und j [2 Punkte]

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X - Y]$ [2 Punkte]

Aufgabe II. Während eines Krieges werden Informationen durch vier mögliche Sender weitergeleitet.

Die Sender A und B leiten jeweils 20 % der Informationen weiter.

Die Sender C und D leiten jeweils 30 % der Informationen weiter.

Die SenderA und B können bei einem Angriff mit Wahrscheinlichkeit 1/8 ausfallen. Die Sender C und D mit Wahrscheinlichkeit 1/4.

Bei einem Angriff wurde eine wichtige Information nicht weiter geleitet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lag das an Sender A?

(Hinweis: Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes Formel)

[6 Punkte]

Aufgabe III. Sei X Poisson verteilt mit Parameter 2.

a) Beweisen Sie $E[X] = 2$ [2 Punkte]

b) Beweisen Sie $Var(X) = 2$ [2 Punkte]

c) Beweisen Sie $P(\{|X - 2| > 4\}) \leq \frac{1}{8}$ [2 Punkte]

Aufgabe IV. Ein fairer Würfel wird immer wieder geworfen. Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ab einem bestimmten Wurf die 2 nicht mehr vorkommt, Null ist. [6 Punkte]

Aufgabe V. Sh. separates Blatt Aufgabe 2-1 [4 Punkte]

Aufgabe VI. Sh. separates Blatt Aufgabe 2-2 [4 Punkte]

Diepenbrock, FB C E.Stoch Übungsklausur Teil 2

Aufgabe 2-1

Der Student S pflegt immer während der Stochastik-Vorlesung sein Frühstück nachzuholen. Aber der Appetit hängt von der (zufallsabhängigen) Temperatur im Hörsaal ab. Die in Grad Celsius gemessene Temperatur T sei stetig verteilt mit folgender Dichte f_T :

$f_T(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot (t-21)^2$ für $20 \le t \le 22$

$f_T(t) = 0$ für $t < 20$ und $f_T(t) = 0$ für $t > 22$

Während der Vorlesungsdoppelstunde sei die Temperatur konstant. Kälte macht hungrig: Bei einer Temperatur zwischen 20 und 20.5 Grad isst er drei Butterbrote, bei einer Temperatur zwischen 20.5 und 22 Grad zwei Butterbrote während der Vorlesung.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f_T und zeigen Sie, dass obige Funktion f_T tatsächlich die Dichte einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist! Hinweis, den Sie auch bei Teil b anwenden können: Stellen Sie sich den Graphen verschoben vor, so dass eine bestimmte Berechnung einfacher wird.

b) Für die zufallsabhängige Anzahl Y der Butterbrote, die er isst, gilt offensichtlich $Y = g \circ T$ mit einer geeigneten Funktion g (oder in der Schreibweise der Statistiker $Y = g(T)$). Geben Sie die Zuordnungsvorschrift für g an! Welche Werte nimmt Y mit welcher Wahrscheinlichkeit jeweils an? Welchen Erwartungswert hat Y ?

Aufgabe 2-2

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Realisierungen von n stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, die alle gemäß derselben stetigen Verteilung mit dem unbekannten Parameter $a > 0$ verteilt seien. Und zwar gelte für die Dichte dieser Verteilung

$f_{a,X_1}(x) = a \cdot x^{a-1}$ für $0 \le x \le 1$ und $f_{a,X_1}(x) = 0$ sonst

(Der Index 1 bei $f_{a,X_1}(x)$ ist kein Schreibfehler, denn alle Zufallsgrößen haben nach Voraussetzung dieselbe Verteilung, und deshalb wird hier einfach die Dichte der Verteilung von X_1 angegeben.)

a) Bestimmen Sie einen Punktschätzer für a mit der Maximum-Likelihood-Methode, wobei Sie annehmen dürfen, dass $0 < x_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt!

> Da Sie bei der Bearbeitung der Übungsklausur das Thema Maximum-Likelihood-Schätzer vielleicht noch nicht gehabt haben, wird hier angegeben, was man hier tun muss, aber Sie sollen natürlich nun die konkreten Schritte durchführen.

Schritt 1: Sie müssen die Dichte der gemeinsamen Verteilung der X_i an der Stelle $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hinschreiben, wobei natürlich unbedingt der Parameter a vorkommen muss, also

$f_{a,(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ldots$ (Der Ausdruck auf der rechten Seite muss natürlich ein Produkt sein.)

Schritt 2: Diese Dichte ist nun als Funktion von a zu betrachten und durch geeignete Wahl von a zu maximieren, aber da die Ableitung eines Produkts sehr umständlich ist, wird stattdessen der Logarithmus durch geeignete Wahl maximiert, und aus dem Produkt wird dabei also .... Vergessen Sie aber nicht, am Schluss etwas zu tun, was Ihnen hoffentlich auch schon im Schulunterricht bei der Lösung von Extremwertaufgaben beigebracht wurde. **Aber Sie brauchen hier zur Zeitersparnis ausnahmsweise nicht nachzuweisen, dass es sich um eine globale Maximalstelle handelt!**

Der Ausdruck, den Sie für die Maximalstelle, die einfach $\hat{a}$ genannt wird, erhalten, ist der Maximum-Likelihood-Schätzer. (Um genau zu sein: Am Schluss ersetzen Sie noch die klein geschriebenen x_i durch groß geschriebene X_i, um die Zufallsabhängigkeit des Maximum-Likelihood-Schätzers auszudrücken.)

b) Warum nimmt der Maximum-Likelihood-Schätzer fast-sicher nur echt positive Werte an (klar, dass das auch wünschenswert ist, weil ja $a > 0$ ist).