~~Alternative~~ Lösung zu Aufgabe 1

Der Wertebereich von X ist $\mathbb{N}$

Der Wertebereich von Y ist $\mathbb{N}_0$

a) $\mu_X(\{k\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$

$\mu_Y(\{k\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \cdot \frac{1}{6}$

Prüfe ob μ_X und μ_Y auf ihren Meßräumen $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ bzw. $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ W-Maße sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_X(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \frac{1}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_Y(\{k\})$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1 \quad \checkmark$$

b) (siehe Seite 2) oder

Wir bemerken $X(\omega) = Y(\omega) + 1 \quad \forall \omega \in \Omega$

$$P(\{X=k\} | \{Y=j\}) = \frac{P(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{P(\{Y=j\})}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq j+1 \\ \dfrac{P(\{X=j+1\} \cap \{Y=j\})}{P(\{Y=j\})} = \dfrac{P(\{X-1=j\} \cap \{Y=j\})}{P(\{Y=j\})} & \\ = \dfrac{P(\{Y=j\})}{P(\{Y=j\})} = 1 & \text{falls } k = j+1 \end{cases}$$

c) $\mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[1 \cdot \mathbb{1}_\Omega] = 1$

(Für Aufg 1a) vgl. Anhang I)

b) Es gilt: $\mathbb{P}(\{X=k\} \mid \{Y=j\}) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{Y=j\})} = (*)$

<u>dann:</u> 1. Fall: $\boxed{j = k-1}$ (Die letzte Stelle j bevor zum ersten Mal die 2 kommt ist genau die $k-1$ Stelle bevor die 2 an Stelle k erscheint! Mit anderen Worten, für $j = k-1$ $X^{-1}(\{k-1\}) = Y^{-1}(\{j\})$) also

$$(*) = \frac{\mathbb{P}(\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{Y=j\})} = 1$$

2. Fall: $\boxed{j \neq k-1}$ (Hier gilt wegen der Disjunktheit der Urbildmengen ($X^{-1}(\{k\})$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $Y^{-1}(\{j\})$ $\forall j \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$)

$$(*) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(\{Y=j\})} = 0$$

c) Streng genommen muß hier zum Wertebereich von X die 0 hinzugenommen werden. Dies erfolgt formal, indem man $\mu_X(\{0\}) := 0$ als zusätzliche Nullmenge hinzunimmt. Nullmengen spielen bei der Betrachtung von Erwartungswerten keine Rolle. Da aber auch Werte 0 bei der Betrachtung von Erwartungswerten wegfallen ist dieses Vorgehen recht umständlich und kann weggelassen werden.

$$\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

Aufg 2 Die Sender leiten zusammen 100 % der Information weiter wobei:

$P(\text{„A leitet weiter"}) = 20\,\% = P(\text{„B leitet weiter"})$

$P(\text{„C leitet weiter"}) = 30\,\% = P(\text{„D leitet weiter"})$

Weiter gilt:

$P(\text{„Info kommt nicht an"} \mid \text{„A leitet weiter"}) = \frac{1}{8}$

$P(\text{„ –"– "} \mid \text{„B –"– "}) = \frac{1}{8}$

$P(\text{„ –"– "} \mid \text{„C –"– "}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{„ –"– "} \mid \text{„D –"– "}) = \frac{1}{4}$

=> mit Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(\text{„Info kommt nicht an"}) =$

$P(\text{„ –"– "} \mid \text{„A leitet weiter"}) \cdot P(\text{„A leitet weiter"})$

$+ P(\text{„ –"– "} \mid \text{„B –"– "}) \cdot P(\text{„B –"– "})$

$+ P(\text{„ –"– "} \mid \text{„C –"– "}) \cdot P(\text{„C –"– "})$

$+ P(\text{„ –"– "} \mid \text{„D –"– "}) \cdot P(\text{„D –"– "}) =$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}3 = \frac{13}{20}$

=> mit Satz von Bayes:

$P(\text{„A leitet weiter"} \mid \text{„Info kommt nicht an"}) =$

$$\frac{P(\text{„Info kommt nicht an"} \mid \text{„A leitet weiter"}) \cdot P(\text{„A leitet weiter"})}{P(\text{„Info kommt nicht an"})}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{20}{8 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{1}{26} \quad \square$$

≙ Wahrscheinlichkeit, dass A der verantwortliche Sender war, unter der Bedingung, dass die Info nicht ankam.

Aufg 3 $\quad X \sim \mathrm{Pois}(2)$ also $P(X=k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$

a) $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 2 \cdot e^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} =$

$= 2 \cdot e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = 2 \cdot e^{-2} \cdot e^{2} = 2$

b) $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{2^k}{k!} e^{-2} - 4 =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1+1) \frac{2^k}{k!} e^{-2} - 4 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{2^k}{k!} e^{-2} + \underbrace{\sum_{k=0} k \frac{2^k}{k!} e^{-2}}_{\mathbb{E}(X)} - 4$

$= 4e^{-2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} \quad - 2 =$

$= 4 - 2 = 2$

c) Es gilt mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung

$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq 4\}) \leq \frac{1}{4^2} V(X) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

Aufg 4 (vgl. Aufg 1) $\quad (\Omega, 2^{\Omega}, P) := (\{1-6\}^{\mathbb{N}}, 2^{\{1-6\}^{\mathbb{N}}}, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} u_i)$

Sei $k \in \mathbb{N}$ der bestimmte Wurf ab dem die 2 nicht mehr vorkommt

$A_n^k := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \neq 2 \;\forall\, k \leq i \leq n\} \; (n \geq k) \implies$

$A_n^k \supseteq A_{n+1}^k \;\forall n \geq k$ eine kontrahierende Mengenfolge.

Ferner gilt: $P(A_n^k) = (\frac{5}{6})^{n-k} \;\forall n \geq k$. Wegen der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen gilt für

$A^k := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^k$ (A^k ist also die Menge der Versuchsausgänge die ab dem k-ten Wurf keine 2 mehr enthalten)

$P(A^k) = \lim_{n \to \infty} P(A_n^k) = \lim_{n \to \infty} (\frac{5}{6})^{n-k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Beachte: $P(\bigcup_{k} \bigcap_{n \geq k} A_n^k) = P(\liminf A_n^k) = 0$

Als abz. Vereinigung von Nullmengen gilt $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^k) = 0$

Anhang – I

Aufg 1 (Die zwei Versionen der geometrischen Verteilung)

Definiere Wahrscheinlichkeitsraum:

$$(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P}) := \left(\{1-6\}^{\mathbb{N}}, 2^{\{1-6\}^{\mathbb{N}}}, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} u_i \right)$$

mit u_i die Gleichverteilung auf $(\{1-6\}, 2^{\{1-6\}})$

Dies ist der W-Raum des unendlichfachen fairen Würfelwurfs. Definiere ferner die Zufallsvariablen

1) $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ X ordnet einem Versuchsausgang $w \in \Omega$ die Position zu auf der zum ersten Mal eine 2 steht.

$$\mu_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \tfrac{1}{6} \quad \text{(geom. Vert. Version I)}$$

2) $Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ Y ordnet einem Versuchsausgang $w \in \Omega$ die letzte Position zu bevor zum ersten Mal eine 2 erscheint, Insbesondere also $Y(w) = 0$ für alle $w \in \Omega$ mit $w_1 = 2$ und

a)

$$\mu_Y(\{k\}) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{k} \cdot \tfrac{1}{6} \quad \text{(geom. Vert. Version II)}$$

Beachte Die Wertebereiche von X und Y sind verschieden.