Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

M.Sc. Brice Hakwa
hakwa@uni-wuppertal.de

Seminar im Wintersemester 2010/2011:

Quantitative und implementierte Methoden der Marktrisikobewertung

- **Zusammenfassung zum Thema:** Berechnung von Value-at-Risk

Die Berechnung des VaR kann grundsätzlich auf drei Wegen erfolgen:

1. Analytisch (Parametrisch)
2. Historische Simulation (nicht Parametrisch)
3. Monte-Carlo-Simulation (Parametrisch)

Und hängt von der Wahl des Wertänderungsmodelles .z.B.:

- diskrete Rendite: $R(t,t+1) = \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1$
- stetige Rendite: $r(t,t+1) = ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$
- P&L-Funktion: $L(t,t+1) = -(S_{t+1} - S_t)$

I) Analytische Verfahren (Delta-Normal-Methode)

Die Delta-Methode basiert auf die Annahme dass, die Wertänderungen normalverteilt sind.

- Berechnung von Value-at-Risk einzelnen Positionen

Betrachtet man die drei verschiedenen Modelle der Wertänderung von Finanzprodukt die wir untersucht haben. Dann bekommt man unter Normalverteilungsannahme unterschiedlichen Formeln für die analytische Berechnung des VaR eines Finanzposition.

1. Annahme über normalen Verteilung der diskreten Rendite.

   D.h. $R(t,t+1) \sim N(\mu,\sigma^2) \;\Leftrightarrow\; \frac{S_{t+1}-S_t}{S_t} = \mu + \sigma W \;\; mit \;\; W \sim N(0,1)$
   Zur Erinnerung: $VaR(\alpha)$ und L sind wie folgt definiert,

$$Pr(L \leq VaR(\alpha)) = \alpha \quad \text{und } L_t = (-(S_{t+1} - S_t)).$$

   Wir erhalten dann durch mathematische Transformationen folgende Äquivalenzen.

$$\begin{aligned}
Pr(L \leq VaR(\alpha)) =& Pr\left(\frac{L}{S_t} \leq \frac{VaR}{S_t}\right) = \alpha \\
=& Pr\left(\frac{-L}{S_t} \geq -\frac{VaR}{S_t}\right) = \alpha \\
=& Pr\left(\mu + \sigma W \geq -\frac{VaR}{S_t}\right) = \alpha \\
=& Pr\left(W \geq -\left(\frac{\frac{VaR}{S_t} + \mu}{\sigma}\right)\right) = \alpha \\
=& 1 - \Phi\left(\frac{-\left(\frac{VaR}{S_t} + \mu\right)}{\sigma}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow& \Phi\left(\frac{-\left(\frac{VaR}{S_t} + \mu\right)}{\sigma}\right) = 1 - \alpha \\
\Leftrightarrow& \frac{-\left(\frac{VaR}{S_t} + \mu\right)}{\sigma} = \Phi^{-1}(1-\alpha) \\
\Leftrightarrow& -\left(\frac{VaR}{S_t} + \mu\right) = \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha) \\
\Leftrightarrow& -\frac{VaR}{S_t} = \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha) + \mu \\
\Leftrightarrow& VaR = -S_t\left(\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha) + \mu\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

2. Annahme über normalen Verteilung der stetigen Rendite.

   D.h. $r_t := \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$.
   Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
Pr(V \leq VaR) &= Pr(V - S_t \leq VaR - S_t) \\
&= Pr(-S_{t+1} \leq VaR - S_t) \\
&= Pr\left(\frac{-S_{t+1}}{S_t} \leq \frac{VaR - S_t}{S_t}\right) \\
&= Pr\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \geq \frac{-(VaR - S_t)}{S_t}\right) \\
&= Pr\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \geq \ln\left(\frac{-(VaR - S_t)}{S_t}\right)\right) \\
&= Pr\left(r_t \geq \ln\left(\frac{-(VaR - S_t)}{S_t}\right)\right).
\end{aligned}
$$

   Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{-(VaR-S_t)}{S_t}\right) - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(\frac{-(VaR - S_t)}{S_t}\right) = \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha) + \mu \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-VaR + S_t}{S_t} = e^{\left(\sigma\Phi^{-1}(\alpha)+\mu\right)} \\
\Leftrightarrow\ & -VaR = S_t\left(e^{\left(\sigma\Phi^{-1}(\alpha)+\mu\right)}\right) - S_t \\
\Leftrightarrow\ & VaR(V;\alpha) = S_t\left(1 - e^{\left(\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)+\mu\right)}\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

3. Annahme über normalen Verteilung der Verlustverteilung.

   D.h. $L_t = -(S_{t+1} - S_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$.
   Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& Pr(L \leq VaR) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & Pr\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \leq \frac{VaR-\mu}{\sigma}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \Phi\left(\frac{VaR-\mu}{\sigma}\right) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \frac{VaR-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \\
\Leftrightarrow\ & VaR = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Berechnung von Varlue-at-Risk von Portfolios mit $N \leq 2$ Positionen

Die Delta-Normal-Methode für Portfolios liegt einem Linearen Portfolio zu Grunde. D.h.:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta X_i \tag{4}$$

Wobei

- ΔP = Wertänderung des gesamten Portfolios.
- ΔX_i = Wertänderung eines Position i
- α Koeffizient bzw. Sensitivität des gesamten Portfolios bezüglich X_i)

Unter diesen Annahmen (Normal-Verteilung der einzelnen Risikofaktoren X_i, Linearität des Portfolios), sind die Wertänderungen des zu grundlegenden Portfolios ΔP auch normalverteilt mit Parametern:

$$\mu_p = \alpha^T \mu \quad \sigma_P = \sqrt{\alpha^T \Sigma \alpha} \tag{5}$$

$$mit \ \ \alpha, \mu \in \mathbb{R}^n \ \ und \ \ \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & COV_{12} & \cdots & COV_{1n} \\ COV_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & COV_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COV_{n1} & COV_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{6}$$

Die VaR wird dann aus der Gleichung (1), (2) und (3) berechnet.

Bemerkung 1. Betrachtet man den Mean-VaR anstelle der normalen VaR, so kann der VaR_p nach **Portfolio-Selection-Theorie** von **Markowitz** für n= 2 wie folgt berechnet werden.

$$VaR_p = \sqrt{(VaR_1, VaR_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \end{pmatrix}} \tag{7}$$

$$= \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 \cdot \rho_{12} \cdot VaR_1 \cdot VaR_2} \tag{8}$$

Die Gleichung (8) lässt sich unter Betrachtung von drei Fällen analysieren.

1. Fall 1) $\rho = 1 \ \Leftrightarrow \ VaR_p = VaR_1 + VaR_2$
   Ökonomische Interpretation:
   Kein Diversifikationseffekt
2. Fall 2) $\rho = -1 \ \Leftrightarrow \ VaR_p = |VaR_1 - VaR_2|$
   Ökonomische Interpretation:
   Es ist der Idealfall für die Diversifizierung nach Markowitz. Es gibt einen perfekten Hedge wenn $VaR_1 = VaR_2 \ \Leftrightarrow \ VaR_p = 0$
3. Fall 3) $\rho = 0 \ \Leftrightarrow \ VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2}$

Bemerkung 2. **Cornish-Fisher-Adjustierung für den VaR.**
Wie schon erwähnt, liegt der VaR eine Normalverteilung der Wertänderungen zugrunde. Es notwendig, Methoden der Anpassung des VaR (z.B. **Cornish-Fisher-Methode**) zu untersuchen. Da die Normalverteilungshypothese in meisten Fällen verletzt ist. Ist

Definition 1. Cornish-Fisher-Adjustierung ist ein Methode um das Quantil einer Verteilungsfunktion auf Basis der ersten vier Momente (Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe γ und Kurtosis δ) zu approximieren. es gilt nämlich:

$$\hat{q}_\alpha = q_\alpha + \frac{1}{6}(q_\alpha^2 - 1) \cdot \gamma + \frac{1}{24}(q_\alpha^3 - 3q_\alpha) \cdot \delta - \frac{1}{36}(2q_\alpha^3 - 5q_\alpha) * \gamma^2$$

Dabei entspricht q_α dem Wert der invertierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle α. Betrachten mann z.B. die Gleichung (3), Der modifizierte VaR ist dann:

$$VaR_{cf} = \sigma \hat{q}_\alpha + \mu \tag{9}$$

II) Historische Simulation (nicht parametrisches Modell)
Die Historische Simulation verwendet historische Zeitreihen, um in der Vergangenheit tatsächlich vorgekommene Marktveränderungen zu identifizieren, mit deren Hilfe der value-at-Risk berechnet wird. Es ist bei der historischen Simulation keine explizite Annahmen über die statistischen Eigenschaften (z.B. Verteilung, Kovarianzmatrix) der Wertänderungen von Risikofaktoren nötig, man spricht also von *Nicht-Parametrischen Modell*).

Hier wird der VaR durch der $\alpha - quantil$ von der letzten N empirischen Renditen geschätzt.

III) Monte-Carlo-Simulation Die Monte-Carlo-Simulation ist wie die Delta-Normal-Methode eine parametrische Methode.
Hier wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Risikofaktoren Anhand einer großen Zahl von Szenarien erzeugt, und dann wie bei der historischen Simulation den $\alpha - Quantil$ berechnet. Dabei werden die Szenarien anhand der geschätzten statistischen Eigenschaften der vorgegebenen Wertänderungsverteilung (oder Prozess) simuliert.

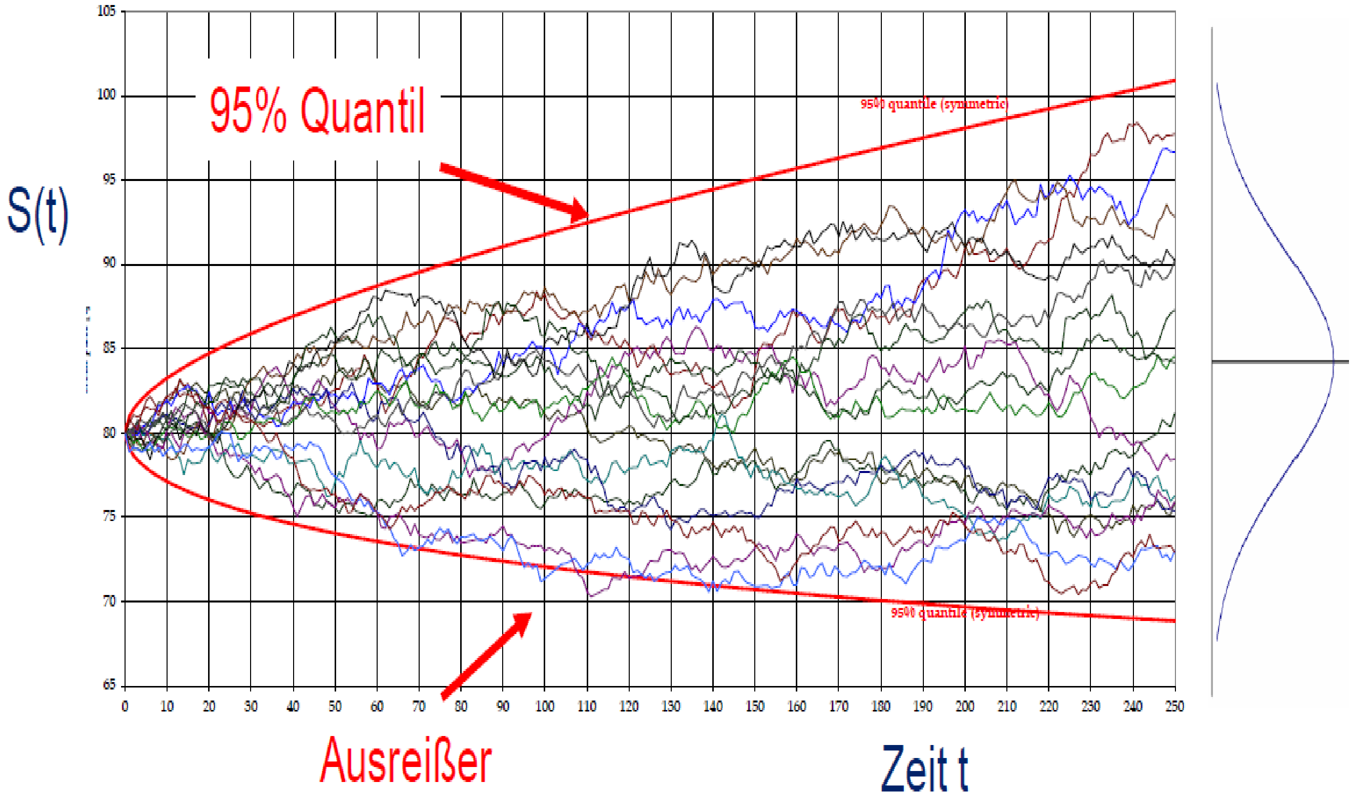

Abbildung 1: Source: d-fine