Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

M.Sc. Brice Hakwa
hakwa@uni-wuppertal.de

Seminar im Wintersemester 2010/2011:
Quantitative und implementierte Methoden der Marktrisikobewertung

- **Zusammenfassung zum Thema:** Value at Risk

I) Definiton

Der Value-at-Risk (VaR) ist ein Risikomaß, mit dem das Risiko eines Portfolios durch einen Geldbetrag ausdrückt wird (Monetäre Risikomass)

Definition 1 (Value-at-Risk)**.** Der VaR ist der als Geldeinheit ausgedrückte Verlust, der mit einer vorgegebenen Warscheinlichkeit α nicht in den nächsten N Tagen (Zeithorizon) überschritten wird.

D.h nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit α (z.B $\alpha = 0.95 \;\; oder \;\; \alpha = 0.99$) kann ein Verlust eintreten, der größer als der VaR ist.
Der VaR ermöglich also auf die folgende Frage zu beantworten: Wieviel ein Finanzinstitut mit einer Wahrscheinlichkeit α für einen festen Zeithorizont N (Maximal) verlieren kann? Zwei Elemente sind also nach definition entscheidend für die Berechung und die Interpretation von VaR:

1. **Der Zeithorizon N** entspricht dem Zeitraum, in dem die Wertänderung des Portfolios gemessen wird;
2. **Das Konfidenzniveau** α, das die Wahrscheinlichkeit, dass die Verlust den VaR nicht überschreit entspricht.

Bemerkung 1. Es ist zu bemerken, dass der VaR nur ein Risikomaß für normalen Marktbedingungen ist und in der Regel berücksichtigt nur 99% der möglichen Verluste, er ist somit nicht geeignet um die Tail-Risiko (Extrem-Verlust) zu quantifizieren . Für die Quantifizierung von extrem Risiken sind andere Techniken wie, **Stress-Tests** und die **Extremwerttheorie-Methoden** besser geeignet.

II) Mathematishe Interpretation

$$P(L \leq VaR(\alpha, N)) = \alpha \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow F_L(VaR(\alpha, N)) = \alpha \tag{2}$$

Bemerkung 2. Die Gleichung (3) bedeutet dass, $VaR(\alpha, N)$ der $\alpha - Quantil$ von der Verlustverteilung F_L ist.

I) Exkurs (Quantil)

Definition 2 (Quantil). Als Quantil der Ordnung α oder $\alpha - Quantil$ ($Q\alpha$) wird in der Statistik ein Merkmalswert bezeichnet, unterhalb dessen ein vorgegebener Anteil α aller Fälle der Verteilung liegt. Jeder Wert unterhalb von $Q\alpha$ unterschreitet diesen vorgegebenen Anteil. Deshalb wird α auch als Unterschreitungsanteil bezeichnet. Dabei ist α eine reelle Zahl zwischen 0 (gar kein Fall der Verteilung) und 1 (alle Fälle oder 100 % der Verteilung).

Allgemeiner wird in der Mathematik das $\alpha - Quantil$ wie folgt definiert. Sei X eine Zufallsvariable und F ihre Verteilungsfunktion, ist α eine Zahl zwischen 0 und 1 ($\alpha \in (0,1)$), so ist ein (unteres) $\alpha - Qantil$ x_α jede Zahl mit der Eigenschaft:

$$F(x_\alpha) = \alpha. \tag{3}$$

Qantil sind nicht eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit wird durch folgende Formel festgelegt.

$$x_\alpha = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\} \tag{4}$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\} \tag{5}$$

Die durch (6) definierte Funktion F^{-1} heißt *inverse Verteilungsfunktion* oder *Quantilfunktionfunktion*.

Bemerkung 3. Im Falle einer Normalverteilung mit Erwartungswert E(X) können die Quantile der Verteilung dargestellt werden als

$$F_x^{-1}(\alpha) = E(X) + \Phi^{-1}(\alpha)\,\sigma(X).$$

Wobei $\Phi^{-1}(\alpha)$ dem Wert der invertierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle α entspricht.

Wir können also wegen (3) und (6) $VaR(\alpha)$ entweder explizit durch:

$$VaR(\alpha) = l_\alpha \tag{6}$$

(wobei l_α das α-Quantil der Verlustverteilung bezeichnet) oder implizit durch:

$$F_L\left(VaR\left(\alpha\right)\right) = \alpha \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{VaR(\alpha)} f_L(l)dl = \alpha \tag{8}$$

definieren.

Bemerkung 4. Um den VaR als monetäres Risikomaß interpretieren zu können, muss er nur nicht negative Werte annehmen (nicht-negativität). Dies führt zu einer Option-artigen Definition des VaR.

Definition 3. Der VaR zu gegebener Verlustverteilung und zu vorgegebenem Wahrscheinlichkeitsniveau $\alpha \in (0;1)$ ist durch

$$VaR(\alpha) = \max\left(0; l_\alpha\right) \tag{9}$$

definiert. Dabei bezeichnet l_α das α-Quantil der Verlustverteilung.

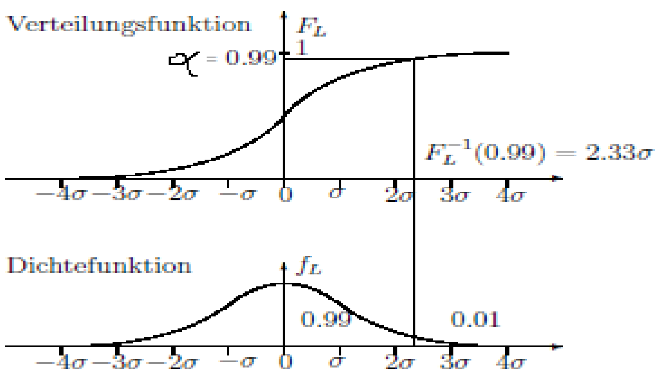

Abbildung 1: VaR bei normalverteiltem Verlust

Bemerkung 5.

Definition 4. ES Manchmal ist es sinnvoll, anstelle der gewöhnlichen VaR,

$$VaR^{mean} = VaR - E(L) \tag{10}$$

als Risikomaß zu verwenden. .(z.B. als Masse für Eigenkapitalbedarf)