Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

M.Sc. Brice Hakwa
hakwa@uni-wuppertal.de

Seminar im Wintersemester 2010/2011:
Quantitative und implementierte Methoden der Marktrisikobewertung

- **Zusammenfassung zum Thema:** Analyse und Modellierung von empirischen Finanzmarktdaten

I) Von Zins zur Rendite

	Diskrete Rendite	Stetige Rendite
Verzinsung	$S_{t+1} = S_t + S_t * R(t,t+1)$	$S_{t+1} = S_t \exp(r(t,t+1))$
Einperiodige Rendite	$R(t,t+1) = \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1$	$r(t,t+1) = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ $= \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t)$
Mehrperiodige Rendite k = Anzahl der Perioden	$R(t,t+k) = \frac{S_{t+k}}{S_t} - 1 = \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{S_{t+i+1}}{S_{t+i}}\right) - 1$ $= \prod_{i=0}^{k-1}(1 + R(t+i,t+i+1)) - 1$	$r(t,t+k) = \ln\left(\frac{S_{t+k}}{S_t}\right)$ $= \sum_{i=0}^{k-1} r(t+i,t+i+1)$
Symmetrieeigenschaft	Keine	$r(t_1,t_2) = -r(t_2,t_1)$
Portfoliorendite n = Anzahl Positionen	$R(t,t+1) = \sum_{i=1}^{n} a_i R^i(t,t+1)$ $a_i = \frac{S_t^i}{S_t}$	$r(t,t+1) = \ln\left[\sum_{i=1}^{n} a_i e^{(r^i(t,t+1))}\right]$
Zusammenhang zw. R & r	$R(t,t+1) = e^{r(t,t+1)} - 1$	$r(t,t+1) = \ln(R(t,t+1) + 1)$

Dabei ist $\{S_t, t = 0, \ldots, T\}$ eine Zeitreihe von positiven Werten (Kurs, Preis, ...) einer Finanzposition.

Bemerkung 1. Die Anwendung der Taylor-Approximation erster Ordnung auf $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x = \frac{S_{t+1}}{S_t}$ mit $x_0 = 1$ ergibt:

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) &= 0 + \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} - 1\right) + r\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \\ &= \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1 + o\left(\left|\frac{S_{t+1}}{S_t}\right| - 1\right) \\ &= R(t,t+1) + o\left(\left|\frac{S_{t+1}}{S_t}\right| - 1\right) \\ \Leftrightarrow \ r(t,t+1) &\approx R(t,t+1) \end{aligned}$$

II) Gewinn- und Verlustverteilung (P&L)

Definition 1.

$$L_{[t,\ t+\Delta t]} = -\left(V_{t+\Delta t} - V_t\right)$$

mit

- $L_{[t,\ t+\Delta t]}$ = Verlust des Portfolios im Zeitraum von t bis $t + \Delta t$
- $V(t)$ = Wert des Portfolios im Zeitpunkt t
- Δt = Zeithorizont, z.B. ein Tag, zehn Tagen, ein Monat onder ein Jahr. ($\Delta t = t_{k+1} - t_k$))

Die Verteilung von $L_{[t,\ \Delta t]}$ wird als **Verlustverteilung** bezeichnet.

Sei $Z_t = (Z_{t,1}, ..., Z_{t,d})' \in \mathbb{R}^d$, so kann V_t als Funktion von der Zeit und von Z_t modelliert werden. es gilt also in diesem Fall :

$$V_t = f(t, Z_t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

Wobei f eine messbare Funktion ist. Es gilt folglich:

$$L_{[t,\ t+1]} = L_{t+1} = -\left(f(t+1, Z_t + \Delta Z_t) - f(t, Z_t)\right) \qquad (*)$$

Wobei $\Delta Z_t = Z_{t+1} - Z_t$ ist (Risikofaktoränderung). $\Delta Z_t = Z_{t+1} - Z_t$ ist im Zeitpunkt t unbekannt und kann also nur durch seine Stochatischen Eigenschaften bestimmen werden.

Bemerkung 2. ΔZ_t ist im Zeitpunkt t der einzige Unbekannt in Gleichung (*), d.h. die Verlustsverteilung hängt nur von ΔZ_t bzw. von der Verteilung von Z_t ab.

Die Bemerkung 2 erlaubt es, eine neue Formulierung für den Verlust einzuführen. (Der **Verlustoperator** $l_{[t]}(x)$):

$$l_{[t]}(x) = -\left(f(t+1, Z_t + x) - f(t, Z_t)\right) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Es gilt offensichtlich $L_{[t]}(\Delta Z_t) = L_{t+1}$.
Ist f differenzierbar , so können wir $L_{[t]}(x) bzw. L_{t+1}$. mit Hilfe der Multivariate Taylor-Approximation linierlizieren.

$$\begin{aligned} L^{\Delta}_{t+1} &= -\left(f_t\,(t, Z_t)\,\Delta t \ + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}\,(t, Z_t)\,\Delta Z_{t,i} \right) \\ &= -\left(f_t\,(t, Z_t) \ + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}\,(t, Z_t)\,\Delta Z_{t,i} \right) \end{aligned}$$

Und für Den **Verlustoperator** gilt:

$$L^{\Delta}_{[t]}\,(x) = -\left(f_t\,(t, Z_t) \ + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}\,(t, Z_t)\, x_i \right)$$

Wobei f_t partielle Ableitung von f nach t bezeichnen.

Exkurs: (Taylorformel)

-Univariate Die Taylor-Approximation erster Ordnung einer Funktion $f \in C$ an der stelle x_0 ist gegeben durch:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \ \ mit \ \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{|x - x_0|} \ = 0$$

-Multivariate
Sei A eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, und $f : A \to \mathbb{R} \ \ mit \ \ f \in C^{P+1}$ dann ist die Taylor-Approzimation von f an der Stelle $x_0 \in A$ gegeben durch:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{P} (x_i - x_{0_i})\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_0) + r(x) \tag{1}$$