Übungsklausur SDG SS2018 Prof. Dr. Barbara Rüdiger Bergische Universität Wuppertal

Übungsklausur

Annahme im Text: alle W-Räume sind vollständig und alle filtrierte W-Räume erfüllen die üblichen Bedingungen

Übung I:
Sei $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zeitreihe auf $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$, mit $M_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

a) Geben Sie eine Bedingung, unter welche $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ als Martingale bezeichnet werden kann.

b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen in a) vorgetragene Bedingung mit der folgenden unterschiedlichen Bedingung äquivalent ist:
$E[M_{n+1}/\mathcal{F}_n] = M_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Übung II:
Sei

$$\begin{aligned} \Phi :\ \mathbb{M}^2_T(\Omega, \mathcal{F}_T, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P) &\quad\to \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P) \\ \{M_s\}_{[0,T]} &\quad\to M_T \end{aligned} \tag{1}$$

a) Beweisen Sie, dass Φ surjektiv ist.

b) Definieren Sie eine Norm, mit der $\mathbb{M}^2_T(\Omega, \mathcal{F}_T, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ ein Banachraum ist, und beweisen Sie es.

Übung III:
Sei $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}^0_+}$ ein zentrierter Lévy -Prozess in $\mathbb{M}^2_T(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathcal{F}_T, , P)$, mit $E[(L_1)^2] = D$.

a) Beweisen Sie, dass $\sum_{0<s\leq t} 1_{]2,3]}(\Delta L_s)$ ein Lévy Prozess ist.

b) Sei $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^0_+}$ eine adaptierte Brownsche Bewegung so dass B_1 die Gauss - Verteilung $\mathcal{N}(1,1)$ hat. Berechnen Sie $Var(\int_0^t (\mathbf{B}_s) dL_s)$.

Übung IV:
Sei $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}^0_+} \in \mathbb{M}^2_T(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathcal{F}_T, , P)$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2] = \mathbb{E}[|M_t^2| - |M_s^2|]$, für $s < t$.

b) Der Prozess $(M_t)_{t\in[0,T]}$ habe nun zusätzlich unabhängige Inkremente. Beweisen Sie, dass $(M.)^2 - \mathbb{E}[(M.)^2]$ eine Martingale bzgl der gleichen Filtration ist.

Übung V:

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie, dass $X_t := e^{-\sigma B_t}$ sowie $Y_t := \cos(B_t)$ Ito-Prozesse sind und berechnen Sie dX_t, dY_t.

b) Sei $a \in \mathbf{R}$ sowie $\sigma > 0$. Zeigen Sie, dass die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = aX_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbf{R} \quad \text{fast sicher}$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Sie dürfen hierbei den Existenz und Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung verwenden. Bestimmen Sie $df(X_t)$ für $f \in C_b^2(\mathbf{R})$ und folgern Sie daraus

$$\mathbb{E}(f(X_t)) = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}((Lf)(X_s))ds, \quad t \geq 0$$

wo $Lf(y) = af'(y) + \frac{\sigma^2}{2} f''(y)$.

Übung VI:

Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ein Wertpapier, was am 1.1. 2015 0 Euro Wert ist, und in jedem Monat $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ um 20 Euro sinkt, und mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ um 10 Euro wächst, wobei die Zuwächse in jedem Monat stochastisch unabhängig sind.

a) Erklären Sie ob $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bzlg der von $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ generierten Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Martingale ist. Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) - Falls $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ keine Martingale bzgl $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann definieren Sie eine Martingale $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bzlg $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt, dass $M_n = M_4$ P-f.s. für jedes $n \geq 4$, und $M_n \neq M_4$ für $n = 1, 2, 3$.
- Falls $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ eine Martingale bzgl $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, definieren Sie eine Filtration $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl der $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ keine Martingale ist.
Jede Aussage soll dabei bewiesen werden.

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.
Jede Teilübung wird mit 3 Punkten bewertet.
Abgegebene Blätter ohne Namen werden nicht bewertet.
Elektronische Geräte jeder Art und eigene Blätter sind nicht erlaubt
Das Prüfungsamt und die Prüfungsauschüsse werden über Täuschungsversuche informiert.