# SDG
**Prof. Dr. Barbara Rüdiger**
**SS 2018**

## Übungszettel IV

**Übung I:**

i) ("Taking out property") Sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ und $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Beweisen Sie:$E[YX/\mathcal{G}] = YE[X/\mathcal{G}]$ P- f.s..

ii) Beweisen Sie die "Tower property" für bedingte Erwartungswerte.

iii) Beweisen Sie die "Jensen Ungleichung" für bedingte Erwartungswerte.

**Übung II:**
Sei $1 \leq p < \infty$, und $\lambda$ das Lesbegues -Maß.
Beweisen Sie, dass die Riemann -Treppenfunktionen in $L_p([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda)$ dicht sind. (Basierend auf dem Resultat der Vorlesung genügt es zu zeigen, dass sie in der $\|\cdot\|_p$ - Norm dicht im linearen Raum der Treppenfunktionen sind)

**Übung III:**
Sei $\{L_t\}_{t \in \mathbb{R}_+^0}$ ein zentrierter Lévy -Prozess mit $\mathbb{E}[(L_1)^2] = D$. Beweisen Sie, dass $\{L_t\}_{t \in [0,T]} \in \mathbb{M}_T^2(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}, \mathcal{F}_T, , P)$ für $T > 0$.

**Übung IV:**
Sei $\{L_t\}_{t \in \mathbb{R}_+^0}$ ein zentrierter Lévy -Prozess mit $\mathbb{E}[(L_1)^2] = D$

a) Berechnen Sie $VAR(\int_0^t exp(-s) dL_s)$ in Funktion von $D$ und $t > 0$.

b) Finden Sie (irgend) eine reelle Funktion $g$, so dass $VAR(\int_0^t g(s) dL_s) = 4t^2$, für $t > 0$.

Im Folgenden Sei $X_t$ ein Lévy-Prozess und $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ zwei disjunkte Borel-Mengen mit $0 \notin \overline{\Lambda_1}$, $0 \notin \overline{\Lambda_2}$. In der Vorlesung haben Sie gezeigt, dass

$$L_t^1 = \sum_{0 < s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{\Lambda_1}(\Delta X_s) \quad \text{und} \quad L_t^2 = \sum_{0 < s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{\Lambda_2}(\Delta X_s)$$

zwei Lévy Prozesse sind. In den nächsten beiden Aufgaben wollen wir die Unabhängigkeit von $L_t^1$ und $L_t^2$ zeigen.

**Übung V:**
Für $u,\, v \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$C_t^u = \frac{\mathrm{e}^{iuL_t^1}}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuL_t^1}\right]} - 1 \quad \text{und} \quad D_t^v = \frac{\mathrm{e}^{ivL_t^2}}{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{ivL_t^2}\right]} - 1.$$

Zeigen Sie, dass $C_t^u$ und $D_t^v$ zentrierte Martingale sind.

**Übung VI:**
Es sei $C_t^u$ und $D_t^v$ wie in Aufgabe V.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[C_t^u D_t^v] = 0$.

(b) Schließen Sie aus (a) und (b) die Unabhängigeit von $L_t^1$ und $L_t^2$.

**Hinweis zu (b)**: Nutzen sie die Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse.

**Bemerkung:** Im ganzen Übungsblatt wird angenommen, dass die üblichen Bedingungen gelten.