SDG
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
SS 2018

Übungszettel III

Übung I:
Seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $\mathcal{G}\subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ eine σ -Algebra auf Ω. Beweisen Sie:

i) falls $X \geq 0$ P -f.s., dann auch $E[X/\mathcal{G}]\geq 0$ P- f.s.

ii) $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ impliziert $E[X/\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, für $1 < p < \infty$.

iii) falls X stochastisch unabhängig von $\mathcal{G}$ ist, so gilt, dass $E[X/\mathcal{G}]= E[X]$ P-f.s..

iv) $E[YX/X]= XE[Y/X]$ P - f.s.

Übung II:
Beweisen Sie den Satz der dominierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte. (Der Satz wurde in der Vorlesung in der 3 Woche Mai ausgesagt)

Übung III:
Sei $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Zufallsprozess auf $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathcal{F}, P)$.
Beweisen Sie, dass $\{M_t\}_{t\in[0,T]} \in M_T^2(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathcal{F}, P)$, falls und nur falls $M_T\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ und für jedes $0 \leq s < t \leq T$, für jede Zufallsvariabel $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$, die Eigenschaft $E[M_t X] = E[M_s X]$ gilt.

Übung IV:
Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$ gegeben, mit $\mathcal{F}_n := \sigma(S_0, ..., S_n)$. Sei $p \in (0, 1)$ fixiert, und S_n sei $B(n, p)$ verteilt. Geben Sie genau die Zufallsvariabel $E[S_3/S_1]$ an.
(Erinnerung: 1. S_n ist Summe von unabhängigen Bernouille Zufallsvariabeln , 2. $\mathcal{F}_n$ ist für jedes n durch endlich viele Ereignisse generiert.)

Übung V:
Finden Sie ein konkretes Beispiel eines W-Raumes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, einer σ -Algebra $\mathcal{G}\subset \mathcal{F}$ auf Ω, so dass die Eigenschaft $\mathcal{N}_\mathcal{F} \subset \mathcal{N}_\mathcal{G}$ nicht gilt.

Übung VI:
Beweisen Sie folgende Aussage:

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen zentrierten Zufallsvariabeln auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann ist $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $M_n := \frac{\exp izS_n}{\mathbb{E}[\exp izS_n]}$, und $S_n := \sum_1^n X_n$, eine Martingale auf $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{F}, P)$, mit $\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, ..., S_n)$.

Bemerkung: Im ganzen Übungsblatt wird angenommen, dass die üblichen Bedingungen gelten